MỤC LỤC

		Trang
Phần Mở đầu		1
Chương 1	*Ky hieu va ñònh nghóa*	4
Chương 2	*Sö ton tai va duy nhat lôi giai*	6
Chương 3	*Xap xæ bang phan tö höu han vôi Ω co bien ña giac*	22
Chương 4	*Xap xæ bai toan bien cong bôi bai toan bien ña giac*	33
Chương 5	*Ap dung tính toan so*	47
Phần Kết luận		59
Tài liệu tham khảo		60

PHẦN MỞ ĐẦU

Trong luận văn này chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để giải bài toán elliptic phi tuyến hai chiều :

(0.1) $$-\frac{\partial}{\partial x}M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right)-\frac{\partial}{\partial y}M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) + g(x,y,u(x,y))\sin u(x,y) = G(x,y) \quad , \quad (x,y)\in\Omega\,,$$

liên kết với điều kiện biên hỗn hợp

(0.2) $$u(x,\varphi(x)) = 0 \qquad , \quad 0 \le x \le 1\,,$$

(0.3) $$M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\nu_1 + M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\nu_2 = H(x,y) \quad , \quad (x,y)\in\Gamma_1\,,$$

với $\Omega = \{(x,y)\in IR^2 \ | 0<x<1, 0<y<\varphi(x)\}$,

$\Gamma_0 = \{(x,y)\in IR^2 \quad , \quad 0\le x\le 1 \quad , \quad y=\varphi(x)\}$,

$\Gamma_1 = \Omega \setminus \Gamma_0$,

$\varphi \in C[0,1]$.

trong đó $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ là pháp vectơ đơn vị trên Γ_1 hướng ra ngoài đối với miền Ω. M_1, M_2, g, G, H là các hàm số cho trước thỏa mãn một số điều kiện sẽ chỉ ra sau. Hàm φ xác định trên Ω thỏa điều kiện :

(0.4) φ liên tục trên [0 , 1] và C^1-từng khúc trên (0 , 1) , $\varphi(x) > 0 \ \ \forall x \in (0 , 1)$.

Trường hợp một chiều với $\Omega = (0 , 1)$, bài toán tương tự(0.1) – (0.3) đã được khảo sát bởi Tucsnak [6], và N.T. Long, T.V. Lăng [5].

Trong [6], Tucsnak đã xét bài toán:

(0.5) $$\begin{aligned}&-\frac{d}{dx}M(u'(x)) + (-\lambda + (\gamma_0-\gamma_1)F(x) - G'(1))\sin u(x) = 0 \quad , \quad 0<x<1\,,\\ &u(0) = 0\,,\\ &M(u'\ (1)) + \gamma_1 G(1)\sin u(1) = 0\,.\end{aligned}$$

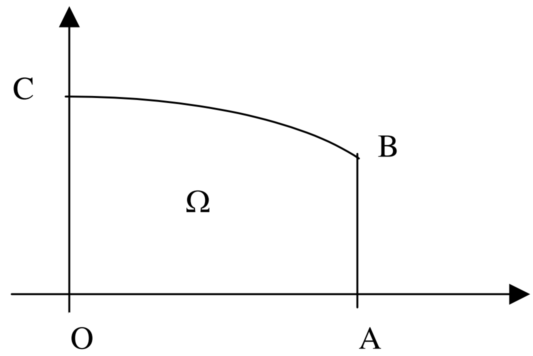
Bài toán (0.5) mô tả sự uốn của một thanh đàn hồi phi tuyến có khối lượng riêng γ_0 được nhúng trong một chất lỏng có khối lượng riêng γ_1, trong đó $\lambda > 0$ là hằng số, F(x) và G(x) là các hàm số cho trước có một ý nghĩa cơ học nào đó, u là góc giữa tiếp tuyến của thanh ở trạng thái bị uốn tại điểm có hoành độ cong x và trục thẳng đứng.

Trong [5], các tác giả đã xét bài toán:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d}{dx}M\big(x,u'(x)\big)+g\big(x,u(x)\big)\sin u(x)=0 \quad , \quad 0<x<1,\\
\textbf{(0.6)}\quad &u(0)=0\,,\\
&M\big(1,u'(1)\big)+b\sin u(1)=0\,.
\end{aligned}
$$

Để giải bài toán (0.6), các tác giả trong [5] sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn cấp 1, một chiều.

Bài toán (0.1)-(0.3) mà chúng tôi khảo sát ở đây là trường hợp hai chiều với miền Ω có biên $\partial\Omega$ gồm ba cạnh thẳng OA, AB, OC và một phần biên cong Γ_0 = BC , trong đó O (0,0), A(1,0), B(1,φ(1)), C(0,φ(0)) (xem hình vẽ).



Vì vậy để sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với các đa thức xấp xỉ cấp 1 cần xấp xỉ biên cong Γ_0 thành biên có "hình răng cưa" (đường gấp khúc).

Ngoài phần mở đầu, kết luận, tài liệu tham khảo, luận văn được chia thành 5 chương.

Chương 1 giới thiệu một số ký hiệu và các kết quả chung chuẩn bị để khảo sát trong các chương sau.

Trong **chương 2** chúng tôi chứng minh sự tồn tại duy nhất lời giải của bài toán (0.1)-(0.3). Kết quả thu được ở chương này đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [5],[6].

Trong **chương 3** chúng tôi sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn tam giác để xấp xỉ lời giải chính xác bài toán (0.1)-(0.3) trong trường hợp Ω xác định bởi hàm φ liên tục và bậc nhất từng khúc trên [0 , 1], tức là biên $\partial\Omega$ là đa giác. Kết quả thu được trong phần này là đánh giá sai số giữa lời giải xấp xỉ và lời giải chính xác theo một cấp độ phụ thuộc vào tính "trơn" của lời giải chính xác. Cũng trong phần này chúng tôi cho kết quả cụ thể ứng với trường hợp riêng $M_1(x,y,z) = M_2(x,y,z) = z$. Kết quả trong phần này tổng quát hóa các kết quả trong [5].

Chương 4 áp dụng kết quả của chương 3 cho miền Ω_n, trong đó $\Omega_n \subset \Omega$ và biên $\partial\Omega_n$ định bởi ba cạnh thẳng OA, AB, OC và đường gấp khúc xác định bởi hàm φ_n liên tục và bậc nhất từng khúc trên [0 , 1], φ_n "xấp xỉ" φ trên [0 , 1]. Kết quả của chương này là các đánh giá sai số giữa lời giải phần tử hữu hạn và lời giải chính xác trong trường hợp Ω_n. Ngoài ra chúng tôi cũng đánh giá được sai số giữa lời giải xấp xỉ bằng phần tử hữu hạn trên Ω_n và lời giải chính xác trên Ω.

Chương 5 cho một ví dụ với M_1, M_2, G, H, g, φ cụ thể. Trong chương này chúng tôi đã tính toán cụ thể cho ra các kết quả số.

CHƯƠNG 1:

KÝ HIỆU VÀ ĐỊNH NGHĨA

1. CÁC KÝ HIỆU VÀ ĐỊNH NGHĨA

Cho $\varphi : [0,1] \to IR^{+}$

$\Omega = \{(x, y) \in IR^2 : \quad 0 < y < \varphi(x), \quad 0 < x < 1\}$

$\partial\Omega$: biên Ω

$\Gamma_0 = \{(x, y) \in IR^2 : y = \varphi(x), 0 \le x \le 1\}$

$\Gamma_1 = \partial\Omega \setminus \Gamma_0$

Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông dụng $C^m(\Omega)$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$. Cần thiết ta có thể tham khảo trong [1], [2], [4]...

Ta ký hiệu

p : số thực , $p > 1$

p' : liên hợp của p, nghĩa là $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$

$\|\cdot\|_X$: chuẩn trên không gian định chuẩn X

$\|\cdot\|$: chuẩn trên $L^2(\Omega)$

$|\cdot|_{m,q,\Omega}$: nửa chuẩn trên $W^{m,p}(\Omega)$

$\langle \cdot,\cdot \rangle_X$: tích vô hướng trên không gian Hilbert X

$\langle \cdot,\cdot \rangle$: tích vô hướng trên $L^2(\Omega)$ hoặc cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm $V \subset L^2(\Omega)$

$mes(\Omega)$: độ đo Lebesgues của tập Ω

$mes(\Gamma)$: độ đo Lebesgues của tập Γ

$V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$

2. MỘT SỐ CÁC BỔ ĐỀ QUAN TRỌNG

Trên V ta định nghĩa nửa chuẩn

$$\|u\|_V = \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)}^p + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} .$$

Bổ đề 1.1: (Xem [1], [3], [4])

(i) *V là không gian Banach phản xạ, khả ly (với chuẩn* $\| \,.\, \|_{W^{1,p}(\Omega)}$*).*

(ii) *Nửa chuẩn trên V (như định nghĩa trong (1.3)) là một chuẩn trên V và tươ ng đương với chuẩn* $\| \,.\, \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Bổ đề 1.2: (Định lý vết) (Xem [1], [4])

Cho Ω *là tập mở bị chặn trong* IR^N*, có biên* $\Gamma = \partial\Omega$ *"đủ trơn". Khi đó tồn tại :*

$$\gamma_0 \quad : \quad W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma) ,$$

γ_0 *tuyến tính liên tục sao cho*

$$\gamma_0 v = v|_\Gamma \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) .$$

γ_0 *được gọi là* ***ánh xạ vết****.*

(Đôi khi người ta vẫn viết $v|_\Gamma$ thay cho γ_0 v mặc dù $v \in W^{1,p}(\Omega)$).

Bổ đề 1.3: (Bổ đề Brouwer) (Xem [4])

Cho V_m *là không gian hữu hạn chiều với chuẩn* $\| \,.\, \|_{V_m}$ *tương ứng với tích vô hướng* $\langle \,.\,,\,.\, \rangle_{V_m}$ *và cho*

$$P_m \;:\; V_m \longrightarrow V_m \text{ liên tục , thỏa :}$$

Tồn tại $\tilde{\rho} > 0$ *sao cho*

$$\forall u \in V_m \,,\; \|u\|_{V_m} = \tilde{\rho} \;\Rightarrow\; \langle P_m(u), u \rangle_{V_m} \geq 0 .$$

Khi đó có $u_0 \in V_m$ *,* $\|u_0\|_{V_m} \leq \tilde{\rho}$ *thỏa phương trình*

$$P_m(u_0) = 0 .$$

Bổ đề 1.4: (Xem [4])

Cho Q là tập mở bị chặn trong IR^N *và* G_m *,* $G \in L^q(Q)$*,* $1 < q < \infty$ *sao cho*

$\|G_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ *, C là hằng số không phụ thuộc m và* $G_m \longrightarrow G$ *hầu hết* $x \in Q$*.*

Khi đó $G_m \longrightarrow G$ *yếu trong* $L^q(Q)$*.*

CHƯƠNG 2 :

SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT LỜI GIẢI

1. CÁC GIẢ THIẾT

Với p > 1 đặt $p' = \dfrac{p}{p-1}$

(H1) $\varphi \in C([0,1]), \varphi(x) > 0, \qquad \forall x \in [0,1],$

φ là C^1 từng khúc trên [0,1].

(H2) $G \in V'$.

(H3) $H \in L^{p'}(\Gamma_1)$.

(H4) $M_1, M_2 \quad : \overline{\Omega} \times IR \to IR,$

$g \qquad : \Omega \times IR \to IR$

là các hàm thỏa điều kiện Caratheodory, nghĩa là:

$\forall z \in IR$, các hàm $M_i(., . , z)$, $g(., . , z)$ đo được trên Ω, và với hầu hết $(x, y) \in \Omega$ các hàm $M_i(x, y, .)$ và $g(x, y, .)$ liên tục theo z, i=1,2.

(H5) *M_1, M_2 đơn điệu tăng theo biến thứ 3, tức là:*

$$(M_i(x,y,z) - M_i(x,y,\tilde{z}))(z - \tilde{z}) > 0 \quad , \quad \forall z, \tilde{z} \in IR, z \neq \tilde{z}, \ \text{a.e}\,(x,y) \in \Omega \quad i = 1, 2$$

(H6) *Tồn tại ba hằng số dương* C_1, C_1', C_2 *và hàm* $h \in L^{p'}(\Omega)$ *sao cho*

(i) $\quad zM_i(x,y,z) \geq C_1 |z|^p - C_1' \quad , \quad \forall z \in IR, \quad \text{a.e}\,(x,y) \in \Omega \ , \ i = 1,2 ;$

(ii) $\quad |M_i(x,y,z)| \leq C_2 \left(|h(x,y)| + |z|^{p-1} \right), \quad \forall z \in IR, \quad \text{a.e}\,(x,y) \in \Omega \ , \ i = 1,2 .$

(H7) *Tồn tại hằng số dương* $C_3 < C_1 / C_0^p$ *thỏa:*

$$|g(x,y,z)| \leq C_3 \left(1 + |z|^{p-1} \right) \quad , \quad \forall z \in IR \ , \ \text{a.e}\,(x,y) \in \Omega \ ,$$

trong đó $C_0 = \sup \left\{ \dfrac{\|v\|_{W^{1,p}}}{\|v\|_V}, v \in V, \quad v \neq 0 \right\}.$

(H8) *p > 2 thỏa:*

$$(p-1)\left(\frac{2}{p}\right)^{p'}\left(\frac{C_3C_0|\Omega|^{1/p'}+\|G\|_{V'}+C_0\tilde{C}\|H\|_{L^{p'}(\Gamma_1)}}{C_1-C_3C_o^p}\right)^{p'}+\frac{4C_1'|\Omega|}{C_1-C_3C_0^p}<\left(\pi/3CC_0\right)^p$$

trong đó $|\Omega| = \text{mes }\Omega = \int_0^1 \varphi(x)dx$,

$$C=\sup\left\{\|v\|_{C(\overline{\Omega})}\ :\ v\in W^{1,p}(\Omega)\ ,\ \|v\|_{W^{1,p}}=1\right\},$$

(C tồn tại do phép nhúng $W^{1,p}(\Omega)\subset\to C(\overline{\Omega})$ *là compact)*

$\tilde{C}$ là hằng số trong định lý vết chương I,

$$\tilde{C}=\sup\left\{\ v\Big|_{\Gamma}\ :\ v\in C^1(\overline{\Omega}),\ \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}=1\right\}.$$

(H9) *Với mỗi* $\alpha \in (0, \pi/3)$ *có hai hằng số dương* g_α *và* k_α *sao cho:*

(i) $k_\alpha \le g_\alpha \cot g\, \alpha$;

(ii) $g(x,y,z) \ge g_\alpha$, $\forall z \in [-\alpha, \alpha]$, *a.e.* $(x,y) \in \Omega$;

(iii) $|g(x,y,z_1) - g(x,y,z_2)| \le k_\alpha |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in [-\alpha, \alpha]$, *a.e.* $(x,y) \in \Omega$.

Bài toán (0.1)-(0.3) được đưa về bài toán biến phân như sau:

Bài toán (P):

Tìm $u \in V$ *sao cho*

$$\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle+\left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right),\frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle+\langle g(x,y,u)\sin u\,,w\rangle+ \tag{2.1}$$
$$=\langle G,w\rangle+\int_{\Gamma_1}Hwds\qquad,\qquad\forall w\in V.$$

2. ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT LỜI GIẢI

Định lý 2.1:

Giả sử M_1 , M_2 , *g, G, H thỏa (H1)-(H7). Khi đó bài toán (P) có lời giải . Hơn nữa, nếu thêm vào các giả thiết (H8) và (H9) thì lời giải của (P) là duy nhất .*

Chứng minh:

Định lý được chứng minh qua nhiều bước:

Bước 1: *Xấp xỉ Galerkin*

Vì V tách được nên tồn tại một "cơ sở" đếm được $\{w_j\}_{j=1,2,...}$ theo nghĩa:

- $w_j \in V$,
- $\forall$ m, $\{w_1, ..., w_m\}$ độc lập tuyến tính,
- Tập các tổ hợp tuyến tính hữu hạn các w_j trù mật trong V .

Ta tìm lời giải xấp xỉ dưới dạng:

(2.2) $$u_m(x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j(x,y) ,$$

trong đó các c_{m_j} thỏa hệ phương trình phi tuyến sau

(2.3) $$\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial w_j}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial w_j}{\partial y}\right\rangle + \left\langle g(x,y,u_m)\sin u_m , w_j\right\rangle = \left\langle G, w_j\right\rangle + \int_{\Gamma_1} H w_j ds \qquad j = 1,..,m .$$

Trước hết ta chứng minh hệ (2.3) có lời giải.

Đặt V_m là không gian hữu hạn chiều sinh bởi w_j , j = 1..m.

Coi $P_m : V_m \longrightarrow V_m$ xác định bởi

(2.4) $$P_m(u_m) = \sum_{j=1}^{m} P_{m_j}(u_m) w_j ,$$

(2.5) $$P_{m_j}(u_m) = \left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial w_j}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial w_j}{\partial y}\right\rangle + \left\langle g(x,y,u_m)\sin u_m , w_j\right\rangle - \left\langle G, w_j\right\rangle - \int_{\Gamma_1} H w_j ds , \quad j = 1,..,m ,$$

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j .$$

Khi đó (2.3) tương đương với:

(2.6) $$P_m(u_m) = 0 .$$

Ta có thể nghiệm lại không khó khăn rằng:

(2.7) $P_m : V_m \longrightarrow V_m$ liên tục.

Để áp dụng bổ đề Brouwer (bổ đề 1.3, chương 1) ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\widetilde{\rho}_m > 0$ sao cho

(2.8) $\| u_m \|_{V_m} = \tilde{\rho}_m \quad \Rightarrow \quad \langle P_m(u_m), u_m \rangle_{V_m} \geq 0$.

Chú ý rằng trên V_m ta lấy tích vô hướng sau

(2.9) $\langle u_m, v_m \rangle_{V_m} = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} d_{m_j}$

với $u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j \quad , \quad v_m = \sum_{j=1}^{m} d_{m_j} w_j$.

Chuẩn trên V_m sinh bởi tích vô hướng < . , . >$_{V_m}$ được ký hiệu $\| . \|_{V_m}$.

Ta có

$$\langle P_m(u_m), u_m \rangle_{V_m} = \sum_{j=1}^{m} P_{m_j}(u_m) c_{m_j}$$

(2.10)
$$= \left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial u_m}{\partial x} \right\rangle + \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\rangle$$
$$+ \langle g(x, y, u_m) \sin u_m , u_m \rangle - \langle G, u_m \rangle - \int_{\Gamma_1} H u_m ds$$

Từ giả thiết (H6)(i), ta được:

$$\left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial u_m}{\partial x} \right\rangle + \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial u_m}{\partial y} \right\rangle$$

(2.11)
$$\geq C_1 \| u_m \|_V^p - 2C_1^{'} |\Omega| .$$

Từ giả thiết (H7) suy ra:

(2.12) $\left| \langle g(x, y, u_m) \sin u_m, u_m \rangle \right| \leq C_3 C_0 |\Omega|^{1/p'} \| u_m \|_V + C_3 C_0^p \| u_m \|_V^p$.

Sử dụng định lý vết (bổ đề 1.2 , chương 1) ta thu được:

(2.13)
$$\left| \int_{\Gamma_1} H u_m ds \right| \leq \| H \|_{L^{p'}(\Gamma_1)} \| \gamma_0 u_m \|_{L^p(\Gamma_1)}$$
$$\leq \tilde{C} C_0 \| H \|_{L^{p'}(\Gamma_1)} \| u_m \|_V .$$

Từ (2.10)-(2.13) và do $G \in V'$ suy ra:

(2.14)
$$\langle P_m(u_m), u_m \rangle_{V_m} \geq \left(C_1 - C_3 C_0^p\right) \| u_m \|_V^p - 2C_1^{'} |\Omega|$$
$$- \left(C_3 C_0 |\Omega|^{1/p'} + \| G \|_{V'} + \tilde{C} C_0 \| H \|_{L^{p'}(\Gamma_1)}\right) \| u_m \|_V$$

$$=\left(C_1 - C_3C_0^p\right)\left(\| u_m\|_V^p - \beta_1\| u_m\|_V - \gamma_1\right),$$

trong đó $\beta_1 > 0$, $\gamma_1 > 0$ được xác định bởi

(2.15) $$\beta_1 = \left(C_3C_0|\Omega|^{1/p'} + \| G\|_{V'} + \widetilde{C}C_0\| H\|_{L^{p'}(\Gamma_1)}\right)\Big/\left(C_1 - C_3C_0^p\right),$$

$$\gamma_1 = 2C_1'|\Omega|\Big/\left(C_1 - C_3C_0^p\right).$$

Chú ý rằng sử dụng bất đẳng thức Holder ta có:

(2.16) $$\beta_1\| u_m\|_V \le \frac{1}{p}\left(\varepsilon\| u_m\|_V\right)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{\beta_1}{\varepsilon}\right)^{p'},$$

trong đó $\varepsilon > 0$ được chọn sao cho

(2.17) $$\frac{\varepsilon^p}{p} = \frac{1}{2} \qquad \text{hay} \qquad \varepsilon = \left(\frac{p}{2}\right)^{1/p}.$$

Khi đó từ (2.14), (2.16), (2.17) suy ra:

(2.18) $$\left\langle P_m(u_m), u_m\right\rangle_{V_m} \ge \left(C_1 - C_3C_0^p\right)\left(\frac{1}{2}\| u_m\|_V^p - \frac{1}{p'}\left(\frac{2\beta_1}{p}\right)^{p'} - \gamma_1\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(C_1 - C_3C_0^p\right)\left(\| u_m\|_V^p - (p-1)\left(\frac{2\beta_1}{p}\right)^{p'} - 2\gamma_1\right).$$

Chú ý rằng mọi chuẩn trên V_m đều tương đương, do đó tồn tại hai hằng số dương C_{1m} và C_{2m} sao cho:

(2.19) $$C_{1m}\| v\|_{V_m} \le \| v\|_V \le C_{2m}\| v\|_{V_m}, \qquad \forall v \in V_m.$$

Chọn $\widetilde{\rho}_m > 0$ thỏa $\widetilde{\rho}_m = \frac{1}{C_{1m}}\rho$ với

(2.20) $$\rho = \left((p-1)\left(\frac{2\beta_1}{p}\right)^{p'} + 2\gamma_1\right)^{1/p}.$$

Khi đó nếu $\| u_m\|_{V_m} = \widetilde{\rho}_m$ thì từ (2.18)-(2.20) ta suy ra

$$\left\langle P_m(u_m), u_m\right\rangle_{V_m} \ge 0.$$

Vậy (2.8) thỏa, do đó áp dụng bổ đề Brouwer suy ra (2.6) có lời giải u_m thỏa

(2.21) $$\| u_m \|_{V_m} \le \tilde{\rho}_m .$$

<u>Bước 2:</u> *Đánh giá tiên nghiệm*

Từ $P_m(u_m) = 0$, với tính toán tương tự dẫn đến (2.18), ta suy ra:

(2.22) $$\left(\| u_m \|_V^p - (p-1)\left(\frac{2\beta_1}{p}\right)^{p'} - 2\gamma_1 \right) \le 0.$$

Do đó

(2.23) $$\| u_m \|_V \le \rho = \left((p-1)\left(\frac{2\beta_1}{p}\right)^{p'} + 2\gamma_1 \right)^{1/p}.$$

Từ giả thiết (H6)(ii) và (2.23) suy ra:

(2.24) $$\left\| M_1\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C_2 \left(\| h \|_{L^{p'}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u_m}{\partial x} \right\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \right).$$

Do (2.23) và (2.24) ta được

(2.25) $$\left\| M_1\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C ,$$

C là hằng số độc lập với m.

Tương tự với M_2 ta cũng có:

(2.26) $$\left\| M_2\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C .$$

Đánh giá tương tự, từ giả thiết (H7) và (2.23) ta suy ra

(2.27) $$\| g(x, y, u_m) \sin u_m \|_{L^{p'}(\Omega)} \le C ,$$

C là hằng số độc lập với m.

Chú ý rằng phép nhúng $V \subset\to L^p(\Omega)$ là compact, khi đó từ (2.23), (2.25), (2.26) suy ra tồn tại một dãy con của $\{u_m\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho

(2.28) $u_m \longrightarrow u$ trong $W^{1,p}(\Omega)$ yếu,

(2.29) $u_m \longrightarrow u$ trong $L^p(\Omega)$ mạnh,

(2.30) $u_m \longrightarrow u$ a.e $(x,y) \in \Omega$,

(2.31) $M_1(x,y,\partial u_m/\partial x) \longrightarrow \chi_1$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu,

(2.32) $M_2(x,y,\partial u_m/\partial y) \longrightarrow \chi_2$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu.

Mặt khác từ giả thiết (H4) suy ra:

(2.33) $g(x,y,u_m)\sin u_m \longrightarrow g(x,y,u)\sin u$ a.e $(x,y) \in \Omega$.

Áp dụng bổ đề 1.4, chương 1 với

$N = 2$, $q = p'$, $Q = \Omega$,

$G_m = g(x,y,u_m)\sin u_m$ và $G = g(x,y,u)\sin u$,

từ (2.27) và (2.33) suy ra

(2.34) $g(x,y,u_m)\sin u_m \longrightarrow g(x,y,u)\sin u$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu .

<u>Bước 3:</u> *Qua giới hạn*

Qua giới hạn trong phương trình (2.3), sử dụng (2.31), (2.32) và (2.34) ta suy ra u thỏa phương trình:

(2.35)
$$\left\langle \chi_1, \frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle + \left\langle \chi_2, \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle + \langle g(x,y,u)\sin u, w\rangle = \langle G, w\rangle + \int_{\Gamma_1} Hw\,ds, \quad \forall w \in V.$$

Như vậy để chứng minh u là lời giải bài toán (P) ta chỉ cần chứng minh

$$\chi_1 = M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{và} \quad \chi_2 = M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Từ (2.3) ta có

(2.36)
$$\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial u_m}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial u_m}{\partial y}\right\rangle = -\langle g(x,y,u_m)\sin u_m, u_m\rangle + \langle G, u_m\rangle + \int_{\Gamma_1} Hu_m\,ds$$

Sử dụng (2.28), (2.29), (2.34), (2.35) và qua giới hạn trong (2.36) ta có

(2.37)
$$\lim_{m\to\infty}\left[\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right), \frac{\partial u_m}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial y}\right), \frac{\partial u_m}{\partial y}\right\rangle\right] = \left\langle \chi_1, \frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle + \left\langle \chi_2, \frac{\partial u}{\partial y}\right\rangle.$$

Từ (2.28), (2.31)-(2.33) và (2.37) suy ra

(2.38)
$$\lim_{m\to\infty}\left[\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)-M_1(x,y,\phi_1),\frac{\partial u_m}{\partial x}-\phi_1\right\rangle + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)-M_2(x,y,\phi_2),\frac{\partial u_m}{\partial y}-\phi_2\right\rangle\right]$$
$$=\left\langle \chi_1 - M_1(x,y,\phi_1),\frac{\partial u}{\partial x}-\phi_1\right\rangle+\left\langle \chi_2 - M_2(x,y,\phi_2),\frac{\partial u}{\partial y}-\phi_2\right\rangle,$$
$$\forall \phi_1,\phi_2\in L^p(\Omega).$$

Do giả thiết (H5) ta suy ra:

(2.39)
$$\left\langle \chi_1 - M_1(x,y,\phi_1),\frac{\partial u}{\partial x}-\phi_1\right\rangle+\left\langle \chi_2 - M_2(x,y,\phi_2),\frac{\partial u}{\partial y}-\phi_2\right\rangle\geq 0 \quad ,$$
$$\forall \phi_1,\phi_2\in L^p(\Omega).$$

Trong (2.39) chọn

$$\phi_1=\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda w_1 \quad , \qquad w_1\in L^p(\Omega),\quad \lambda>0,$$
$$\phi_2=\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Ta có

(2.40)
$$\left\langle \chi_1 - M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda w_1\right),w_1\right\rangle\geq 0$$

Cho $\lambda \longrightarrow 0_+$, sử dụng giả thiết (H6)(ii) và do định lý hội tụ bị chặn Lebesgue ta suy ra

(2.41)
$$\left\langle \chi_1 - M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right),w_1\right\rangle\geq 0 \quad , \quad \forall w_1\in L^p(\Omega).$$

Do đó

(2.42)
$$\chi_1 = M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Lý luận tương tự, từ (2.39) ta cũng có

(2.43)
$$\chi_2 = M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Vậy sự tồn tại lời giải u của bài toán (P) được chứng minh.

Bước 4 : *Sự duy nhất lời giải*

Trước hết ta chú ý rằng lời giải của bài toán (P) tồn tại và bị chặn trong V

(2.44) $$\|u\|_V \le \rho,$$

trong đó ρ được xác định từ (2.23). Từ giả thiết (H8) và (2.15) ta có:

(2.45) $$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le CC_0\rho \le \frac{\pi}{3}.$$

Gọi u_1, u_2 là hai nghiệm của (P) thỏa

(2.46) $$\|u_i\|_{C(\overline{\Omega})} \le CC_0\rho \le \frac{\pi}{3} \quad , \qquad i = 1,2.$$

Khi đó $u_1 - u_2$ thỏa

(2.47)
$$\begin{aligned}
&\left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - M_1\left(x, y, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle \\
&+ \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - M_2\left(x, y, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle \\
&+ \langle g(x, y, u_1)\sin u_1 - g(x, y, u_2)\sin u_2 \,,\, w\rangle \quad = 0 \quad , \forall w \in V.
\end{aligned}$$

Chọn $w = u_1 - u_2$ trong (2.46) ta có

(2.48)
$$\begin{aligned}
&\left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) - M_1\left(x, y, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial x}(u_1 - u_2)\right\rangle \\
&+ \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - M_2\left(x, y, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial y}(u_1 - u_2)\right\rangle \\
&+ \langle g(x, y, u_1)(\sin u_1 - \sin u_2), u_1 - u_2\rangle \\
&+ \langle (g(x, y, u_1) - g(x, y, u_2))\sin u_2, u_1 - u_2\rangle \quad = 0
\end{aligned}$$

Chú ý rằng từ các giả thiết (H9) và từ (2.46) ta có

(2.49)
$$\begin{aligned}
&\langle g(x, y, u_1)(\sin u_1 - \sin u_2), u_1 - u_2\rangle \\
&+ \langle (g(x, y, u_1) - g(x, y, u_2))\sin u_2, u_1 - u_2\rangle \\
&\ge (g_\alpha \cos\alpha - k_\alpha \sin\alpha)\|u_1 - u_2\|^2 \ge 0,
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha = CC_0\,\rho$.

Từ (2.48) và (2.49), do tính đơn điệu tăng ngặt của M_1 và M_2 ta suy ra $u_1 - u_2 = 0$. Vậy $u_1 = u_2$.

Định lý được chứng minh. ■

3. TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Trong trường hợp riêng với

(2.50) $M_1(x,y,z) = M_2(x,y,z) = z$,

bài toán (0.1)-(0.3) trở thành

(2.51) $-\Delta u + g(x,y,u)\sin u = G \quad , \qquad (x,y) \in \Omega,$

(2.52) $u\big|_{\Gamma_0} = 0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma_1} = H.$

Bài toán biến phân tương ứng với (2.50)-(2.51) là:

<u>Bài toán (P'):</u>

Tìm $u \in \mathscr{V} = \left\{ v \in H^1(\Omega): \ v\big|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$ *sao cho*

(2.53) $a(u,w) + \langle g(x,y,u)\sin u, w\rangle = \langle G, w\rangle + \int_{\Gamma_1} Hwds \quad , \quad \forall w \in \mathscr{V}.$

trong đó a (. , .) là dạng song tuyến tính xác định bởi

(2.54) $a(u,w) = \iint_{\Omega} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial w}{\partial y} \right) dxdy$.

Ta cũng chú ý rằng $\mathscr{V}$ là không gian Hilbert đối với tích vô hướng a (. , .) và chuẩn sinh bởi tích vô hướng là

(2.55) $|v|_1 = \sqrt{a(v,v)}$.

Mặt khác, trong $\mathscr{V}$ hai chuẩn $|\,.\,|_1$ và $\|\,.\,\|_{H^1(\Omega)}$ là tương tương do đó

(2.56) $\exists\, C_0 > 0 \quad : \quad |v|_1 \le \|v\|_{H^1(\Omega)} \le C_0 |v|_1 \ , \ \forall v \in \mathscr{V}.$

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H1') $\varphi \in C([0,1]), \varphi(x) > 0 \quad , \quad \forall x \in [0,1]$,

φ C^2 từng khúc trên [0,1].

(H2') *$G \in \mathscr{V}'$ ($\mathscr{V}'$ là đối ngẫu của $\mathscr{V}$).*

(H3') *$H \in L^2(\Gamma_1)$.*

(H4') $g \quad : \Omega \times IR \to IR$

là hàm thỏa điều kiện Caratheodory.

(H5') *Tồn tại hằng số dương* $C_3 < 1/C_0^2$ *thỏa:*

$$|g(x,y,z)| \le C_3(1+|z|) \quad , \quad \forall z \in IR \quad , \quad \text{a.e} \quad (x,y) \in \Omega ,$$

trong đó $C_0 = \sup\left\{ \dfrac{\| v \|_{H^1}}{| v |_1}, v \in \mathscr{V}, \ v \neq 0 \right\}$.

(H6') *Với mỗi* $\alpha \in (0, \pi/3)$ *có hai hằng số dương* g_α *và* k_α *sao cho:*

(iv) $k_\alpha \le g_\alpha \cot g\, \alpha$,

(v) $g(x,y,z) \ge g_\alpha$, $\forall z \in [-\alpha, \alpha]$, *a.e.* $(x,y) \in \Omega$,

(vi) $|g(x,y,z_1) - g(x,y,z_2)| \le k_\alpha |z_1 - z_2|$, $\forall z_1, z_2 \in [-\alpha, \alpha]$, *a.e.* $(x,y) \in \Omega$.

Định lý 2.2:

Giả sử các giả thiết (H1')-(H5') là đúng. Khi đó bài toán (P') có lời giải . Hơn nữa, nếu thay thế giả thiết (H2') bởi giả thiết

(H2'') $G \in L^2(\Omega)$

thì bài toán (P') có lời giải $u \in H^2(\Omega) \cap \mathscr{V}$.

Hơn nữa, nếu bổ sung thêm giả thiết (H6') và thay giả thiết (H2') bởi giả thiết (H2'') sao cho

(H7') $\left(\int_0^1 \varphi(x)dx \right)^{1/2} + \|G\| + \|H\|_{L^2(\Gamma_1)}$ *đủ nhỏ*

thì bài toán (P') có duy nhất một lời giải trong $H^2(\Omega) \cap \mathscr{V}$.

Chứng minh:

Tương tự định lý 2.1, định lý 2.2 được chứng minh qua nhiều bước.

<u>Bước 1:</u> *Xấp xỉ Galerkin*

Giả sử $\{w_j\}_{j=1,2,\ldots}$ "cơ sở" đếm được của $\mathscr{V}$. Ta tìm lời giải xấp xỉ dưới dạng:

(2.57) $$u_m(x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j(x,y),$$

trong đó các c_{m_j} thỏa hệ phương trình phi tuyến sau

(2.58)
$$a(u_m, w_j) + \langle g(x,y,u_m)\sin u_m , w_j\rangle = \langle G, w_j\rangle + \int_{\Gamma_1} Hw_j ds$$
$$j = 1,..,m.$$

Trước hết ta chứng minh hệ (2.58) có lời giải bị chặn.

Đặt $\mathscr{V}_m$ là không gian hữu hạn chiều sinh bởi w_j, j = 1..m.

Coi $P_m : \mathscr{V}_m \longrightarrow \mathscr{V}_m$

(2.59)
$$P_m(u_m) = \sum_{j=1}^{m} P_{m_j}(u_m) w_j$$

(2.60)
$$P_{m_j}(u_m) = a(u_m, w_j) + \langle g(x,y,u_m)\sin u_m , w_j\rangle - \langle G, w_j\rangle - \int_{\Gamma_1} Hw_j ds$$
$$j = 1,..,m ,$$

$$u_m(x,y) = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j(x,y) .$$

Khi đó (2.58) tương đương với:

(2.61) $$P_m(u_m) = 0 .$$

Ta có thể nghiệm lại không khó khăn rằng:

(2.62) $P_m : \mathscr{V}_m \longrightarrow \mathscr{V}_m$ liên tục.

Để áp dụng bổ đề Brouwer (bổ đề 1.3, chương 1) ta chỉ cần chứng minh tồn tại $\widetilde{\rho}_m > 0$ sao cho

(2.63)
$$\| u_m \|_{v_m} = \widetilde{\rho}_m \quad \Rightarrow \quad \langle P_m(u_m), u_m\rangle_{v_m} \geq 0 ,$$

trong đó $\| . \|_{v_m}$ là chuẩn sinh bởi tích vô hướng sau:

(2.64)
$$\langle u_m, v_m\rangle_{v_m} = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} d_{m_j} ,$$

với $u_m = \sum_{j=1}^{m} c_{m_j} w_j$, $\quad v_m = \sum_{j=1}^{m} d_{m_j} w_j$.

Ta có

(2.65)
$$\begin{aligned}\langle P_m(u_m), u_m\rangle_{v_m} &= \sum_{j=1}^{m} P_{m_j}(u_m) c_{m_j} \\ &= a(u_m, u_m) + \langle g(x,y,u_m)\sin u_m , u_m\rangle - \langle G, u_m\rangle - \int_{\Gamma_1} Hu_m ds .\end{aligned}$$

Từ giả thiết (H5') suy ra:

(2.66) $\left|\left\langle g(x,y,u_m)\sin u_m, u_m\right\rangle\right| \le C_3 C_0 |\Omega|^{1/2} |u_m|_1 + C_3 C_0^2 |u_m|_1^2$

Sử dụng định lý vết (bổ đề 1.2 , chương 1) ta thu được:

(2.67)
$$\begin{aligned}\left|\int_{\Gamma_1} H u_m ds\right| &\le \|H\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\gamma_0 u_m\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\le \|H\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\gamma_0 u_m\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\le \widetilde{C}\|H\|_{L^2(\Gamma_1)} \|u_m\|_{H^1(\Omega)} \\ &\le \widetilde{C} C_0 \|H\|_{L^2(\Gamma_1)} |u_m|_1\end{aligned}$$

Từ (2.66)-(2.67) và do $G \in \mathscr{V}'$ suy ra:

(2.68)
$$\begin{aligned}\left\langle P_m(u_m), u_m\right\rangle_{V_m} &\ge \left(1 - C_3 C_0^2\right) |u_m|_1^2 \\ &\quad - \left(C_3 C_0 |\Omega|^{1/2} + \|G\|_{V'} + \widetilde{C} C_0 \|H\|_{L^2(\Gamma_1)}\right) |u_m|_1 \\ &= \Big[\left(1 - C_3 C_0^2\right) |u_m|_1 \\ &\quad - \left(C_3 C_0 |\Omega|^{1/2} + \|G\|_{V'} + \widetilde{C} C_0 \|H\|_{L^2(\Gamma_1)}\right) \Big] |u_m|_1 .\end{aligned}$$

Do mọi chuẩn trên $\mathscr{V}_m$ đều tương đương, suy ra có hai hằng số dương C_{1m} và C_{2m} sao cho:

(2.69) $C_{1m}\|v\|_{\mathscr{V}m} \le |v|_1 \le C_{2m}\|v\|_{\mathscr{V}m}, \ \forall v \in \mathscr{V}_m$.

Chọn $\widetilde{\rho}_m > 0$ thỏa $\widetilde{\rho}_m = \dfrac{1}{C_{1m}}\rho$ với

(2.70)
$$\rho = \frac{C_3 C_0 |\Omega|^{1/2} + \|G\|_{V'} + \widetilde{C} C_0 \|H\|_{L^2(\Gamma_1)}}{\left(1 - C_3 C_0^2\right)}$$

Khi đó nếu $\|u_m\|_{V_m} = \widetilde{\rho}_m$ thì từ (2.68) ta suy ra

$$\left\langle P_m(u_m), u_m\right\rangle_{\mathscr{V}m} \ge 0 .$$

Vậy (2.63) thỏa, do đó áp dụng bổ đề Brouwer suy ra (2.58) có lời giải u_m thỏa

(2.71) $\|u_m\|_{V_m} \le \widetilde{\rho}_m$.

<u>Bước 2:</u> *Đánh giá tiên nghiệm và qua giới hạn*

Từ (2.61) và (2.68) ta suy ra:

(2.72) $$\left| u_m \right|_1 \le \rho ,$$

với $\rho > 0$ cho bởi (2.70).

Từ (2.72) và giả thiết (H5') ta suy ra

(2.73) $$\left\| g(x, y, u_m) \sin u_m \right\| \le C ,$$

C là hằng số độc lập với m..

Chú ý rằng phép nhúng $\mathscr{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là compact, khi đó từ (2.72) và (2.73) suy ra tồn tại một dãy con của $\{u_m\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_m\}$ sao cho:

(2.74) $u_m \longrightarrow u$ trong $H^1(\Omega)$ yếu,

(2.75) $u_m \longrightarrow u$ trong $L^2(\Omega)$ mạnh,

(2.76) $u_m \longrightarrow u$ a.e $(x,y) \in \Omega$.

Từ giả thiết (H4') suy ra:

(2.77) $g(x,y,u_m) \sin u_m \longrightarrow g(x,y,u) \sin u$ a.e $(x,y) \in \Omega$.

Áp dụng bổ đề 1.4, chương 1 với

$N = 2$, $q = 2$, $Q = \Omega$,

$G_m = g(x,y,u_m) \sin u_m$ và $G = g(x,y,u) \sin u$,

từ (2.73) và (2.77) suy ra

(2.78) $g(x,y,u_m) \sin u_m \longrightarrow g(x,y,u) \sin u$ trong $L^2(\Omega)$ yếu .

Do (2.74) và (2.78), qua giới hạn trong (2.58) ta suy ra rằng u là lời giải của bài toán (P').

Sự tồn tại lời giải được chứng minh.

Bây giờ ta thay giả thiết (H2') bởi giả thiết (H2'').

Chú ý rằng lời giải $u \in \mathscr{V}$ của (P') thỏa mãn phương trình sau đây:

(2.79) $$\Delta u = g(x, y, u) \sin u - G \quad \text{trong} \quad D'(\Omega).$$

Từ các giả thiết (H2'') ,(H5') và (2.79) ta suy ra

(2.80) $\Delta u \in L^2(\Omega)$.

Do đó

(2.81) $u \in H^2(\Omega) \cap \mathscr{V}$.

Giả sử (H2'') thỏa đúng thay cho (H2') và thêm vào các giả thiết (H6') và (H7'). Khi đó, cũng từ (H2'') (H5') và (2.79) ta suy ra

(2.82) $$\|\Delta u\| \le C_3\left(|\Omega|^{1/2} + \|u\|\right) + \|G\|$$

Ta chú ý rằng:

(2.83) Trong $H^2(\Omega)$ hai chuẩn $\|v\|_{H^2(\Omega)}$ và $\sqrt{|v|_1^2 + \|\Delta v\|^2}$ là tương đương.

(2.84) Phép nhúng $H^2(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ liên tục (n = 2).

Do đó từ (2.83) và (2.84) ta suy ra:

(2.85) $$\exists \widetilde{C}_0 > 0 \quad : \quad \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \le \widetilde{C}_0\left(|v|_1 + \|\Delta v\|\right) \quad , \qquad \forall v \in H^2(\Omega).$$

Mặt khác, với giả thiết (H2’’) thay cho (H2’) ta có thể đánh giá lời giải u trong $\mathscr{V}$ tương tự như trong (2.72) như sau:

(2.86) $$|u_m|_1 \le \widetilde{\rho}\ ,$$

với

(2.87) $$\widetilde{\rho} = \frac{C_0}{1 - C_3 C_0^2}\left(C_3|\Omega|^{1/2} + \|G\| + \widetilde{C}\|H\|_{L^2(\Gamma_1)}\right).$$

Từ (2.82), (2.85)-(2.87) ta suy ra

(2.88) $$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \alpha$$

(2.89) $$\alpha = \frac{\widetilde{C}_0}{1 - C_3 C_0^2}\left((1 + C_0)\left(C_3|\Omega|^{1/2} + \|G\|\right) + C_0\widetilde{C}(1 + C_3 C_0)\|H\|_{L^2(\Gamma_1)}\right).$$

Chú ý rằng với giả thiết (H7’) ta có $|\Omega| = \int_0^1 \varphi(x)dx$, $\|G\|$, $\|H\|_{L^2(\Gamma_1)}$ đủ nhỏ sao cho

(2.90) $$\alpha \le \pi/3\ .$$

Ta sẽ chứng minh rằng bài toán (P’) có lời giải duy nhất trong $H^2(\Omega)\cap\mathscr{V}$.

Thật vậy, giả sử u, v $\in H^2(\Omega)\cap\mathscr{V}$ là hai lời giải của (P’) thỏa

(2.91) $$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le \alpha \le \frac{\pi}{3} \quad ,$$

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} \le \alpha \le \frac{\pi}{3}\ .$$

Khi đó u – v thỏa

(2.92) $$a(u - v, u - v) + \langle g(x,y,u)\sin u - g(x,y,v)\sin v\ , u - v\rangle = 0$$

hay

(2.93)
$$\begin{aligned} | u-v |_1^2 &+ \langle (g(x,y,u)-g(x,y,v))\sin u, u-v\rangle \\ &+ \langle g(x,y,v)(\sin u-\sin v), u-v\rangle = 0 \end{aligned}$$

Sử dụng giả thiết (H6’) ta đánh giá hai số hạng thứ hai và thứ ba của vế trái (2.93) như sau:

(2.94)
$$\begin{aligned} &\langle (g(x,y,u)-g(x,y,v))\sin u, u-v\rangle + \langle g(x,y,v)(\sin u-\sin v), u-v\rangle \\ &\geq (g_\alpha \cos\alpha - k_\alpha \sin\alpha)\|u-v\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Tổ hợp (2.93) và (2.94) ta thu được $| u-v |_1^2 \leq 0$ hay u = v.

Định lý được chứng minh. ■

CHƯƠNG 3:

XẤP XỈ BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN VỚI Ω CÓ BIÊN ĐA GIÁC

I. TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Trong phần này ta xét trường hợp:

(3.1) φ là hàm bậc nhất từng khúc trên [0,1].

Cho $h > 0$, gọi τ_h là tập các tam giác $K \in \overline{\Omega}$ sao cho

(3.2) $$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau_h} K \ ,$$

$$\overset{0}{K}_1 \bigcap \overset{0}{K}_2 = \phi \qquad , \qquad \forall K_1, K_2 \in \tau_h , \quad K_1 \neq K_2$$

$$\text{diam } K = h_K \leq h , \qquad \forall\ K \in \tau_h .$$

Gọi IP_k là tập các đa thức hai biến có bậc $\leq k$. Đặt

(3.3) $$V_h = \left\{ \ u_h \in C(\overline{\Omega}): \quad u_h\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad u_h\big|_K \in IP_k , \quad \forall K \in \tau_h \right\} .$$

Khi đó V_h là không gian hữu hạn chiều của V, đặt $m_h = \dim V_h$, V_h sinh bởi m_h hàm cơ sở $\{w_j\}$, $j = 1,2,...m_h$ thỏa

(3.4) $$w_j(x_l, y_l) = \delta_{lj} = \begin{cases} 1 & , \quad l = j , \\ 0 & , \quad l \neq j , \end{cases} \qquad 1 \leq j, l \leq m_h ,$$

trong đó $(x_l, y_l) \in \left(\bigcup_{K \in \tau_h} \Sigma_K \right) \backslash \widetilde{\Gamma}_0$,

$\widetilde{\Gamma}_0 = \Gamma_0 \bigcap \left(\bigcup_{K \in \tau_h} \Sigma_K \right)$ (tập các điểm nút (x_l , y_l) trên Γ_0), (K, IP_k, Σ_K) là phần tử hữu hạn tam giác loại k ứng với $K \in \tau_h$ (xem [2] P.G.Ciarlet).

Ta xác định toán tử tuyến tính $r_h : V_h \longrightarrow V_h$ (phép chiếu trên V_h) bởi hạn chế của nó trên tập trù mật $V \bigcap D(\overline{\Omega})$ của V như sau

(3.5) $$(r_h u)(x, y) = \sum_{j=1}^{m_h} u(x_j, y_j) w_j(x, y) \quad , \quad (x, y) \in \overline{\Omega} ,$$

$$u \in V \bigcap D(\overline{\Omega})$$

(xem [2] P.G.Ciarlet) .

Áp dụng định lý 3.1.5 trong [2] với p = q, $\pi_K = r_h \,|_K$, sau đó lấy tổng theo $K \in \tau_h$ ta được:

Bổ đề 3.1:

Cho m, k là số tự nhiên thỏa $0 \le m \le k+1$. τ_h là họ tam giác phân chính qui. Khi đó có hằng số C chỉ phụ thuộc m, p, k, Ω sao cho

(3.6) $$\left|v - r_h v\right|_{m,p} \le Ch^{k+1-m}\left|\,v\,\right|_{k+1,p} \quad , \qquad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega) \bigcap V .$$

Xét bài toán xấp xỉ sau đây:

Bài toán (P_h) :

Tìm u_h thuộc V_h sao cho

(3.7) $$\left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial u_h}{\partial x}\right), \frac{\partial w_h}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial u_h}{\partial y}\right), \frac{\partial w_h}{\partial y}\right\rangle$$
$$+ \left\langle g(x, y, u_h)\sin u_h \,,\, w_h\right\rangle = \left\langle G, w_h\right\rangle + \int_{\Gamma_1} H w_h ds \qquad , \qquad \forall w_h \in V_h$$

Khi đó ta có

Định lý 3.1:

Giả sử φ thỏa (3.1) và M_1, M_2, g, G, H thỏa các giả thiết (H2)-(H9). Khi đó

(i) Bài toán (P_h) tồn tại duy nhất lời giải $u_h \in V_h$.

(ii) Lời giải u_h hội tụ đều về lời giải duy nhất u của bài toán (P).

Chứng minh:

Tương tự như chứng minh định lý 2.1, chương 2.

Sự tồn tại lời giải của u_h của (P_h) trong không gian hữu hạn chiều V_h được chứng minh nhờ bổ đề Brouwer (bổ đề 1.2, chương 1). Đánh giá tiên nghiệm tương tự bước 2 trong chứng minh định lý 2.1, chương 2 ta cũng có:

(3.8) $$\left\| u_h \right\|_V \le \rho$$

với ρ là hằng số xác định như (2.23),

(3.9) $$\left\| M_1\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C ,$$

(3.10) $\left\| M_2\left(x, y, \frac{\partial u_m}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C,$

(3.11) $\left\| g(x, y, u_m) \sin u_m \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C,$

trong đó C là hằng số độc lập với h.

Ta cũng chú ý rằng với p > 2, phép nhúng $V \subset_{\to} C(\overline{\Omega})$ compact nên các đánh giá (3.8)-(3.11) dẫn đến tồn tại một dãy con của $\{u_h\}$ vẫn ký hiệu là $\{u_h\}$ sao cho

(3.12) $u_h \longrightarrow u^*$ trong V yếu ,

(3.13) $u_h \longrightarrow u^*$ trong $C(\overline{\Omega})$ mạnh ,

(3.14) $M_1(x,y,\partial u_h/\partial x) \longrightarrow \chi_1^*$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu ,

(3.15) $M_2(x,y,\partial u_h/\partial y) \longrightarrow \chi_2^*$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu ,

(3.16) $g(x,y,u_h) \sin u_h \longrightarrow g(x,y,u^*) \sin u^*$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu .

Dùng kỹ thuật toán tử đơn điệu tương tựtrong chứng minh của định lý 2.1 chương 2 ta thu được:

(3.17) $\chi_1^* = M_1\left(x, y, \frac{\partial u^*}{\partial x}\right)$ và $\chi_2^* = M_2\left(x, y, \frac{\partial u^*}{\partial y}\right)$.

Do đó qua giới hạn trong (3.7) ta có thể chứng minh u* là lời giải của bài toán (P).

Mặt khác do tính duy nhất lời giải của bài toán (P) ta có u* = u, hơn nữa, toàn bộ dãy $\{u_h\}$ hội tụ về u và thỏa (3.12)-(3.16) thay vì dãy con của nó.

Định lý được chứng minh. ■

Để đánh giá sai số giữa u_h và u ta cần đặt thêm một số giả thiết sau:

(H10) Tồn tại p > 2, $C_4 > 0$ sao cho:

$$\left(M_i(x, y, z) - M_i(x, y, \tilde{z})\right)(z - \tilde{z}) \geq C_4 |z - \tilde{z}|^p \quad, \forall z, \tilde{z} \in IR, \quad \text{a.e } (x, y) \in \Omega, \quad i = 1, 2$$

(H11) $\forall \beta > 0, \exists m_\beta > 0$:

$$\left| M_i(x, y, z) - M_i(x, y, \tilde{z}) \right| \leq m_\beta |z - \tilde{z}| \quad, \forall z, \tilde{z} \in [-\beta, \beta], \ \text{a.e } (x, y) \in \Omega \quad i = 1, 2$$

Khi đó ta có định lý

Định lý 3.2:

- *Giả sử φ thỏa (3.1) và M_1, M_2, g, G, H thỏa các giả thiết (H2), (H3), (H6)-(H11).*

- *Giả sử họ tam giác phân $\{\tau_h\}$ là chính qui.*

  Nếu lời giải $u \in V \cap W^{k+1,p}$ thì ta có đánh giá sai số:

(3.18) $$\left\| u - u_h \right\|_V \le C \left| h \right|^{k/p-1} \left| u \right|_{k+1,p},$$

C là hằng số chỉ phụ thuộc φ, σ, M_1, M_2, g, H, p.

Chứng minh:

Đặt

$$e_h = u_h - u$$

$$E_h = u - r_h u$$

(3.19) $$d_h = u_h - r_h u = e_h + E_h$$

$$w_h = r_h u$$

$$g_{max} = \sup_{(x,y)\in\overline{\Omega},|z|\le\rho CC_0} g(x,y,z)$$

Từ giả thiết (H10) ta có:

(3.20)
$$\begin{aligned}
C_4 \left| d_h \right|_{1,p}^p \le & \left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial x}\right), \frac{\partial d_h}{\partial x}\right\rangle \\
& + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial y}\right) - M_2\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial y}\right), \frac{\partial d_h}{\partial y}\right\rangle \\
= & \left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \frac{\partial d_h}{\partial x}\right\rangle \\
& + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial y}\right) - M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right), \frac{\partial d_h}{\partial y}\right\rangle \\
& + \left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial x}\right), \frac{\partial d_h}{\partial x}\right\rangle \\
& + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - M_2\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial y}\right), \frac{\partial d_h}{\partial y}\right\rangle
\end{aligned}$$

Chú ý rằng từ (2.1) và (3.7) hai số hạng đầu tiên của vế phải (3.20) được viết lại:

(3.21)
$$\begin{aligned}
&\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial x}\right)-M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial d_h}{\partial x}\right\rangle\\
&+\left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u_h}{\partial y}\right)-M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right),\frac{\partial d_h}{\partial y}\right\rangle\\
&=-\langle g(x,y,u_h)\sin u_h - g(x,y,u)\sin u\,,d_h\rangle\\
&=-\langle (g(x,y,u_h)-g(x,y,u))\sin u_h\,,e_h\rangle\\
&\quad-\langle (g(x,y,u_h)-g(x,y,u))\sin u_h\,,E_h\rangle\\
&\quad-\langle g(x,y,u)(\sin u_h-\sin u),e_h\rangle\\
&\quad-\langle g(x,y,u)(\sin u_h-\sin u),E_h\rangle\\
&=-\sum_{i=1}^{4}J_i
\end{aligned}$$

<u>Đánh giá J_1:</u>

Từ điều kiện (H7)(iii) ta có

(3.22)
$$\begin{aligned}
|J_1| &= |\langle (g(x,y,u_h)-g(x,y,u))\sin u_h\,,e_h\rangle|\\
&\le k_\alpha \sin\alpha \| e_h\|^2
\end{aligned}$$

trong đó $\alpha = C\,C_0\,\rho$

<u>Đánh giá J_3:</u>

(3.23)
$$J_3=\langle g(x,y,u)(\sin u_h-\sin u)\sin u_h\,,e_h\rangle \ge g_\alpha \cos\alpha \| e_h\|^2$$

Vậy từ (3.22), (3.23) , kết hợp với giả thiết (H7)(i) ta có:

(3.24)
$$-J_1-J_3\le (k_\alpha\sin\alpha-g_\alpha\cos\alpha)\| e_h\|^2\le 0$$

<u>Đánh giá J_2:</u>

Sử dụng điều kiện (H7)(iii) ta được:

(3.25)
$$\begin{aligned}
|J_2| &= |\langle (g(x,y,u_h)-g(x,y,u))\sin u_h\,,E_h\rangle|\\
&\le (k_\alpha\sin\alpha)\iint_\Omega |e_h E_h|\,dxdy\\
&\le (k_\alpha\sin\alpha)\| e_h\|_{L^p(\Omega)}\| E_h\|_{L^{p'}(\Omega)}
\end{aligned}$$

<u>Đánh giá J_4:</u>

Tương tự với J_3 ta có

(3.26)
$$
\begin{aligned}
|J_2| &= \left|\left\langle g(x,y,u)(\sin u_h - \sin u),\, E_h \right\rangle\right| \\
&\le g_{max} \iint_{\Omega} |e_h E_h|\, dxdy \\
&\le g_{max} \| e_h \|_{L^p(\Omega)} \| E_h \|_{L^{p'}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Vậy từ (3.24)-(3.26) ta thu được:

(3.27)
$$
-\sum_{i=1}^{4} J_i \le -J_2 - J_4 \le (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) \| e_h \|_{L^p(\Omega)} \| E_h \|_{L^{p'}(\Omega)}
$$

<u>Đánh giá số hạng thứ 3 và thứ 4 của vế phải (3.20):</u>

Sử dụng bất đẳng thức Holder suy ra

(3.28)
$$
\begin{aligned}
&\left| \left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial x}\right), \frac{\partial d_h}{\partial x} \right\rangle \right. \\
&\left. + \left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - M_2\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial y}\right), \frac{\partial d_h}{\partial y} \right\rangle \right| \\
&\le \left(\left\| M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} + \right. \\
&\left. + \left\| M_2\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial y}\right) - M_2\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial y}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \right) | d_h |_{1,p}
\end{aligned}
$$

Chú ý rằng với $p > 2$ ta có

(3.29)
$$
W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})
$$

với các phép nhúng liên tục (thậm chí compact).

Từ giả thiết $u \in W^{k+1,p}(\Omega) \cap V$ và do bổ đề (3.1) ta suy ra rằng tồn tại $\beta > 0$ sao cho:

(3.30)
$$
\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le \beta \quad , \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le \beta ,
$$
$$
\left\| \frac{\partial w_h}{\partial x} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le \beta \quad , \quad \left\| \frac{\partial w_h}{\partial y} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \le \beta ,
$$

Từ (H11) và (3.30) suy ra:

(3.31)
$$
\left\| M_1\left(x,y,\frac{\partial u}{\partial x}\right) - M_1\left(x,y,\frac{\partial w_h}{\partial x}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le m_\beta |E_h|_{1,p'} ,
$$

(3.32) $$\left\| M_2\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial y}\right) - M_2\left(x, y, \frac{\partial w_h}{\partial y}\right) \right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le m_\beta |E_h|_{1,p'} .$$

Tổ hợp (3.20), (3.21), (3.27), (3.28), (3.31), (3.32) ta được:

(3.33) $$C_4 |d_h|_{1,p}^p \le (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) \| e_h \|_{L^p(\Omega)} \| E_h \|_{L^{p'}(\Omega)} + 2m_\beta |E_h|_{1,p'} |d_h|_{1,p} .$$

Ta chú ý rằng trong không gian Banach

(3.34) $$V_1 = \left\{ v \in W^{1,p'}(\Omega) \quad : \quad v|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$$

hai chuẩn $\| . \|_{W^{1,p'}(\Omega)}$ và $| . |_{1,p'}$ tương đương, tức là

(3.35) $$|v|_{1,p'} \le \| v \|_{W^{1,p'}(\Omega)} \le C_0^{'} |v|_{1,p'} , \quad \forall\, v \in V_1 .$$

Do đó

(3.36) $$\| E_h \|_{L^{p'}(\Omega)} \le \| E_h \|_{W^{1,p'}(\Omega)} \le C_0^{'} |E_h|_{1,p'} .$$

Tương tự

(3.37) $$\| e_h \|_{L^p(\Omega)} \le \| e_h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_0 |e_h|_{1,p} .$$

Vậy từ (3.33), (3.36), (3.37) suy ra

(3.38) $$C_4 |d_h|_{1,p}^p \le (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) C_0 C_0^{'} |e_h|_{1,p} |E_h|_{1,p'} + 2m_\beta |E_h|_{1,p'} |d_h|_{1,p}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder

(3.39) $$ab \le \frac{1}{p} \varepsilon_1^p a^p + \frac{1}{p'} \varepsilon_1^{-p'} b^{p'} \quad , \qquad \forall \varepsilon_1 > 0, \quad \forall a, b \ge 0 .$$

Từ (3.38) suy ra

(3.40) $$\begin{aligned} C_4 |d_h|_{1,p}^p &\le (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) C_0 C_0^{'} |e_h|_{1,p} |E_h|_{1,p'} \\ &\quad + \frac{1}{p'} \varepsilon_1^{-p'} \left(2m_\beta |E_h|_{1,p'}\right)^{p'} + \frac{1}{p} \varepsilon_1^p |d_h|_{1,p}^p . \end{aligned}$$

trong đó ε_1 được chọn như sau

(3.41) $$\frac{1}{p} \varepsilon_1^p = \frac{C_4}{2} .$$

Từ (3.41) ta viết lại (3.40)

(3.42) $$C_4 |d_h|_{1,p}^p \le 2(k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) C_0 C_0^{'} |e_h|_{1,p} |E_h|_{1,p'} + \frac{2}{p'} \varepsilon_1^{-p'} \left(2m_\beta |E_h|_{1,p'}\right)^{p'} .$$

Mặt khác,

$$|e_h|_{1,p} \le |d_h|_{1,p} + |E_h|_{1,p}$$

(3.43) $$|e_h|_{1,p}^p \le 2^{p-1}\left(|d_h|_{1,p}^p + |E_h|_{1,p}^p\right)$$

(3.44) $$C_5|e_h|_{1,p}|E_h|_{1,p'} \le \frac{1}{p}\varepsilon_2^p|e_h|_{1,p}^p + \frac{1}{p'}\varepsilon_2^{-p'}\left(C_5|E_h|_{1,p}\right)^{p'}$$

trong đó $C_5 = 2(k_\alpha \sin\alpha + g_{max})C_0C_0'$

và $\varepsilon_2 > 0$ được chọn sao cho $2^{p-1}\frac{1}{p}\varepsilon_2^p = \frac{C_4}{2}$.

Từ (3.42)-(3.44) suy ra rằng:

(3.45) $$C_4|e_h|_{1,p}^p \le 2^{p-1}\left(C_4|d_h|_{1,p}^p + C_4|E_h|_{1,p}^p\right)$$

$$\le 2^{p-1}\left(C_5|e_h|_{1,p}|E_h|_{1,p} + \frac{2}{p'}\varepsilon_1^{-p'}\left(2m_\beta|E_h|_{1,p'}\right)^{p'} + C_4|E_h|_{1,p}^p\right)$$

$$\le 2^{p-1}\left[\frac{1}{p}\varepsilon_2^p|e_h|_{1,p}^p + \frac{1}{p'}\varepsilon_2^{-p'}\left(C_5|E_h|_{1,p'}\right)^{p'} + \frac{2}{p'}\varepsilon_1^{-p'}\left(2m_\beta|E_h|_{1,p'}\right)^{p'} + C_4|E_h|_{1,p}^p\right]$$

$$= \frac{C_4}{2}|e_h|_{1,p}^p + 2^{p-1}\left(\frac{1}{p'}\varepsilon_2^{-p'}C_5^{p'} + \frac{2}{p'}\varepsilon_1^{-p'}(2m_\beta)^{p'}\right)|E_h|_{1,p'}^{p'} + 2^{p-1}C_4|E_h|_{1,p}^p .$$

Từ (3.43) suy ra:

(3.46) $$|e_h|_{1,p}^p \le \frac{2^p}{C_4}\left[\left(\frac{1}{p'}\varepsilon_2^{-p'}C_5^{p'} + \frac{2}{p'}\varepsilon_1^{-p'}(2m_\beta)^{p'}\right)|E_h|_{1,p'}^{p'} + C_4|E_h|_{1,p}^p\right].$$

hay

(3.47) $$|e_h|_{1,p}^p \le C_6\left(|E_h|_{1,p'}^{p'} + |E_h|_{1,p}^p\right).$$

Chú ý rằng p > 2 > p' >1, vì vậy

$$L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega),$$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p'}(\Omega),$$

$$|v|_{1,p'} \le C_p|v|_{1,p} \quad , \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega),$$

$$|E_h|_{1,p'}^{p'} \le \left(C_p|E_h|_{1,p}\right)^{p'}$$

(3.48) $$\left|e_h\right|_{1,p}^p \le C_6\left(\left|E_h\right|_{1,p}^p + C_p^{p'}\left|E_h\right|_{1,p}^{p'}\right).$$

Áp dụng bổ đề 3.1 suy ra:

(3.49) $$\left|u - r_h u\right|_{1,p} = \left|E_h\right|_{1,p} \le Ch^k\left|u\right|_{k+1,p}.$$

Từ (3.48) và (3.49) suy ra

(3.50) $$\begin{aligned}\left|e_h\right|_{1,p}^p &\le C_6\left[\left(Ch^k\left|u\right|_{k+1,p}\right)^p + C_p^{p'}\left(Ch^k\left|u\right|_{k+1,p}\right)^{p'}\right]\\ &\le C_7\left(h^{kp} + h^{kp'}\right)\max\left\{\left|u\right|_{k+1,p}^p, \left|u\right|_{k+1,p}^{p'}\right\}\\ &\le C_8 h^{kp'}\left|u\right|_{k+1,p}^p\end{aligned}$$

Vậy

(3.51) $$\left|u_h - u\right|_{1,p} = \left|e_h\right|_{1,p} \le C_9 h^{k p'/p}\left|u\right|_{k+1,p} = C_9 h^{k/(p-1)}\left|u\right|_{k+1,p}$$

Định lý được chứng minh. ■

II. TRƯỜNG HỢP RIÊNG

Bài toán xấp xỉ (P_h'):

Tìm $u_h \in V_h$ (định nghĩa trong (3.3)) ứng với k=1 sao cho

(3.52) $$a(u_h, w_h) + \langle g(x,y,u_h)\sin u_h, w_h\rangle = \langle G, w_h\rangle + \int_{\Gamma_1} Hw_h ds \quad \forall w_h \in V_h$$

Bằng chứng minh tương tự định lý 3.1, ta có định lý sau:

Định lý 3.3:

Giả sử các giả thiết (H1')-(H7') thỏa. Khi đó

(iii) Bài toán (P_h') tồn tại duy nhất lời giải $u_h \in V_h$.

(iv) Lời giải u_h hội tụ đều về lời giải duy nhất u của bài toán (P').

Về đánh giá sai số ta có định lý sau:

Định lý 3.4:

- *Giả sử các giả thiết (H1'), (H2''), (H3')-(H7') thỏa.*
- *Giả sử họ tam giác phân $\{\tau_h\}$ là chính qui.*

Khi đó ta có đánh giá sai số:

(3.53) $$|u - u_h|_1 \le Ch|\, u\,|_2$$

C là hằng số chỉ phụ thuộc φ, g, G, H.

Chứng minh:

Từ định nghĩa của a (. , .) ta có

(3.54) $$a(d_h, d_h) = |\, d_h|_1^2 \, .$$

Mặt khác

(3.55) $$a(d_h, d_h) = a(u_h - u, d_h) + a(u - w_h, d_h) \, .$$

Tương tự trong chứng minh định lý 3.2, ta có đánh giá sau:

(3.56) $$\begin{aligned} a(u_h - u, d_h) &\le (k_\alpha \sin\alpha + g_{max})\| e_h \| \| E_h \| \\ &\le C_0^2 (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) |\, e_h\,|_1 |\, E_h\,|_1 \end{aligned} .$$

Ngoài ra

(3.57) $$a(u - w_h, d_h) \le |\, E_h\,|_1 |\, d_h\,|_1 \, .$$

Kết hợp (3.54) – (3.57) suy ra

(3.58) $$|\, d_h\,|_1^2 \le C_0^2 (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) |\, e_h\,|_1 |\, E_h\,|_1 + |\, E_h\,|_1 |\, d_h\,|_1 \, .$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho số hạng cuối của vế phải (3.58) ta được

(3.59) $$|\, d_h\,|_1^2 \le 2C_0^2 (k_\alpha \sin\alpha + g_{max}) |\, e_h\,|_1 |\, E_h\,|_1 + |\, E_h\,|_1^2 \, .$$

Mặt khác ta còn có

(3.60) $$|\, e_h\,|_1^2 \le 2 |\, E_h\,|_1^2 + 2 |\, d_h\,|_1^2 \, .$$

Do đó từ (3.59) và (3.60) ta được:

(3.61) $$|\, e_h\,|_1^2 \le C_9 |\, e_h\,|_1 |\, E_h\,|_1 + 4 |\, E_h\,|_1^2$$

Trong đó

(3.62) $$C_9 = 4C_0^2 (k_\alpha \sin\alpha + g_{max})$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho số hạng đầu của vế phải (3.61) suy ra

(3.63) $$|\, e_h \,|_1 \le \sqrt{C_9^2 + 8}\, |\, E_h \,|_1 .$$

Áp dụng bổ đề 3.1 ta có (3.53).

Định lý được chứng minh. ∎

CHƯƠNG 4 :

XẤP XỈ BÀI TOÁN BIÊN CONG BỞI BÀI TOÁN BIÊN ĐA GIÁC

I. SỰ HỘI TỤ CỦA LỜI GIẢI BÀI TOÁN BIÊN ĐA GIÁC VỀ LỜI GIẢI BÀI TOÁN BIÊN CONG:

Cho { φ_n } là dãy các hàm liên tục trên [0,1] và bậc nhất từng khúc thỏa các điều kiện sau:

(4.1)
$$\begin{aligned} &\varphi_n(0)=\varphi(0) \quad , \qquad \varphi_n(1)=\varphi(1), \\ &0\le \varphi_n(x)\le \varphi(x) \quad , \qquad \forall x\in[0,1] . \end{aligned}$$

$\varphi_n \longrightarrow \varphi$ trong C([0,1]) khi $n \longrightarrow \infty$ và

(4.2)
$$\| \varphi_n - \varphi \|_{C([0,1])} \le \frac{1}{n} .$$

Đặt

(4.3)
$$\widetilde{V}_n = \left\{ v_n \in W^{1,p}(\Omega) \quad : \quad v_n\big|_{\Omega\setminus\Omega_n} = 0 \right\} \quad , \quad p>2 ,$$

trong đó Ω_n được định nghĩa :

$$\Omega_n = \left\{ (x,y)\in\Omega \quad : \quad \begin{matrix} 0<x<1 \quad , \\ 0<y<\varphi_n(x) \end{matrix} \right\} .$$

Khi đó $\widetilde{V}_n$ là không gian con đóng của V. Trên $\widetilde{V}_n$ xác định chuẩn như sau:

$$\| v_n \|_{\widetilde{V}_n} = \| v_n \|_V .$$

Đặt

(4.4)
$$V_n = \left\{ v_n \in W^{1,p}(\Omega_n) \quad : \quad v_n\big|_{\Gamma_{0n}} = 0 \right\} \quad , \quad p>2 ,$$

trong đó $\Gamma_{0n} = \left\{ (x,\varphi_n(x)) \quad : \quad 0\le x\le 1 \right\}$.

Vậy với mỗi $v_n \in \widetilde{V}_n$ ta có $v_n\big|_{\overline{\Omega}_n} \in V_n$ và ngược lại, với $v_n \in V_n$ ta xét mở rộng

$$\tilde{v}_n = \begin{cases} v_n & (x,y)\in\Omega_n \quad , \\ 0 & (x,y)\in\Omega\setminus\Omega_n \quad . \end{cases}$$

Khi đó $\tilde{v}_n \in \widetilde{V}_n$.

Xét hai bài toán sau

Bài toán ($\tilde{P}_n$):

Tìm $\tilde{u}_n \in \tilde{V}_n$ sao cho

(4.5)
$$\left\langle M_1\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right), \frac{\partial w_n}{\partial x}\right\rangle + \left\langle M_2\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}\right), \frac{\partial w_n}{\partial y}\right\rangle$$
$$+ \left\langle g(x, y, \tilde{u}_n)\sin \tilde{u}_n , w_n\right\rangle = \left\langle G, w_n\right\rangle + \int_{\Gamma_1} H w_n ds \quad , \quad \forall w_n \in \tilde{V}_n .$$

Bài toán (P_n):

Tìm $u_n \in V_n$ sao cho

(4.6)
$$\iint_{\Omega_n}\left[M_1\left(x, y, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right)\frac{\partial w_n}{\partial x} + M_2\left(x, y, \frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\frac{\partial w_n}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+ \iint_{\Omega_n} g(x, y, u_n)\sin u_n w_n dxdy = \left\langle G , \tilde{w}_n\right\rangle + \int_{\Gamma_1} H w_n ds \quad , \quad \forall w_n \in V_n ,$$

trong đó $\tilde{w}_n = \begin{cases} w_n & (x, y) \in \Omega_n \quad , \\ 0 & (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_n \quad . \end{cases}$

Định lý 4.1:

Cho M_1, M_2, g, G, H thỏa các giả thiết (H2) – (H7). Khi đó

(i) Bài toán (P_n) có lời giải duy nhất u_n.

(ii) Mở rộng $\tilde{u}_n$ của u_n trên Ω là lời giải của ($\tilde{P}_n$). Hơn nữa $\tilde{u}_n$ hội tụ đến lời giải chính xác u của (P).

Chứng minh:

Sử dụng định lý 2.1, suy ra sự tồn tại và duy nhất lời giải u_n của bài toán (P_n). Ta mở rộng u_n trên Ω như sau:

(4.7)
$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n & (x, y) \in \Omega_n , \\ 0 & (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_n . \end{cases}$$

Bằng chứng minh tương tự định lý 2.1 chương 2 ta có các đánh giá sau:

$$\| \tilde{u}_n \|_V \le \rho_n ,$$

$$\left\| M_1\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C(\rho_n) ,$$

$$\left\| M_2\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}\right)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C(\rho_n) ,$$

$$\|g(x,y,\tilde{u}_n)\sin\tilde{u}_n\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C(\rho_n)\ .$$

Từ các chứng minh trong chương 2 ta được:

$$\alpha_n = C\,C_0\ \rho_n\ ,$$

$$\rho_n = \left((p-1)\left(\frac{2\beta_{1n}}{p}\right)^{p'} + 2\gamma_{1n}\right)^{1/p},$$

$$\beta_{1n} = \left(C_3C_0|\Omega_n|^{1/p'} + \|G\|_{V'} + \tilde{C}C_0\|H\|_{L^{p'}(\Gamma_1)}\right) \Big/ \left(C_1 - C_3C_0^p\right)\ ,$$

$$\gamma_{1n} = 2C_1'|\Omega_n| \Big/ \left(C_1 - C_3C_0^p\right)\ .$$

Các hằng số C, C_1 , C_1', C_3 , C_0 , và $\tilde{C}$ không phụ thuộc n.

Dễ dàng thấy do $|\Omega_n| \le |\Omega|$

ta có $\gamma_{1n} \le \gamma_1$,

$\beta_{1n} \le \beta_1 \quad \forall\, n$.

suy ra

(4.8) $\|\tilde{u}_n\|_V \le \rho$,

(4.9) $\left\|M_1\left(x,y,\dfrac{\partial\tilde{u}_n}{\partial x}\right)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C$,

(4.10) $\left\|M_2\left(x,y,\dfrac{\partial\tilde{u}_n}{\partial y}\right)\right\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C$,

(4.11) $\|g(x,y,\tilde{u}_n)\sin\tilde{u}_n\|_{L^{p'}(\Omega)} \le C$,

trong đó C và ρ là hai hằng số không phụ thuộc n.

Từ (4.8)-(4.11) suy ra

(4.12) $\tilde{u}_n \longrightarrow \tilde{u}$ yếu trong V,

(4.13) $M_1(x,y,\partial\tilde{u}_n/\partial x) \longrightarrow \chi_1$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu,

(4.14) $M_2(x,y,\partial\tilde{u}_n/\partial y) \longrightarrow \chi_2$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu.

Áp dụng bổ đề 1.4 chương 1 ta được:

(4.15) $g(x,y,\tilde{u}_n)\sin\tilde{u}_n \longrightarrow g(x,y,\tilde{u})\sin\tilde{u}$ trong $L^{p'}(\Omega)$ yếu .

Bổ đề 4.1:

Với mỗi $w \in V$ ta đều tìm được một dãy $\{w_n\} \subset \tilde{V}_n$ sao cho

$$w_n \longrightarrow w \qquad \text{mạnh trong } V \quad \text{khi } n \longrightarrow \infty.$$

Chứng minh bổ đề 4.1:

Trong $C^1([0,1])$ cho hai hàm $\tilde{\varphi}_n$ và $\hat{\varphi}_n$ thỏa:

(4.16) $$\tilde{\varphi}_n = \varphi(x) - \frac{2}{n} \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [0,1],$$

(4.17) $$\hat{\varphi}_n = \varphi(x) - \frac{3}{n} \geq 0 \quad , \quad \forall x \in [0,1],$$

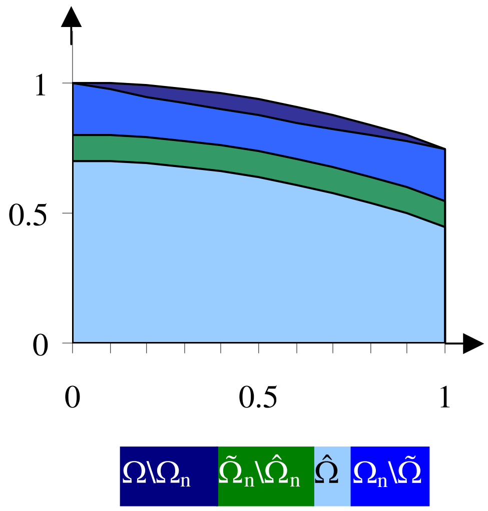
với n đủ lớn.

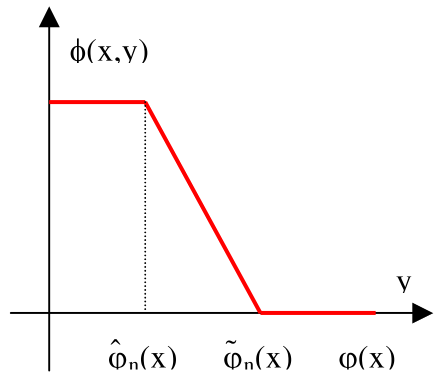
Vậy ta có

$$0 \leq \hat{\varphi}_n(x) < \tilde{\varphi}_n(x) < \varphi_n(x) \leq \varphi(x) \quad , \quad \forall x \in [0,1],$$

Đặt

$$\tilde{\Omega}_n = \left\{ (x,y) \in \Omega \quad : \quad \begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < y < \tilde{\varphi}_n(x) \end{matrix} \right\}, \hat{\Omega}_n = \left\{ (x,y) \in \Omega \quad : \quad \begin{matrix} 0 < x < 1, \\ 0 < y < \hat{\varphi}_n(x) \end{matrix} \right\}.$$





Hình vẽ biểu diễn đồ thị với x cố định

Chọn $\tilde{\varphi}(x)$ $\phi(x,y)$ $\hat{\varphi}_n(x)$ $\varphi(x)$

(4.18) $$\phi_n = \begin{cases} 1 \quad , & (x,y) \in \overline{\hat{\Omega}}_n , \\ 0 \quad , & (x,y) \in \overline{\Omega} \setminus \tilde{\Omega}_n , \\ \dfrac{y - \tilde{\varphi}_n(x)}{\hat{\varphi}_n(x) - \tilde{\varphi}_n(x)}, & (x,y) \in \tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n . \end{cases}$$

Khi đó ϕ_n là hàm liên tục xác định trên $\overline{\Omega}$.

Với $w \in V$ ta xác định dãy $\{w_n\}$ như sau:

(4.19) $w_n(x,y) = \phi_n(x,y)\, w(x,y)$.

Để chứng minh $w_n \longrightarrow w$ trong V ta cần chứng minh

(4.20) $w_n = \phi_n w \longrightarrow w$ trong $L^p(\Omega)$,

(4.21) $\partial w_n/\partial x \longrightarrow \partial w/\partial x$ trong $L^p(\Omega)$,

(4.22) $\partial w_n/\partial y \longrightarrow \partial w/\partial y$ trong $L^p(\Omega)$.

- Chứng minh $w_n \longrightarrow w$ trong $L^p(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} |w_n - w|^p dxdy = \iint_{\Omega} |\phi_n w - w|^p dxdy$$

$$= \iint_{\hat{\Omega}_n} |\phi_n w - w|^p dxdy + \iint_{\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n} |\phi_n w - w|^p dxdy + \iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |\phi_n w - w|^p dxdy$$

Vậy từ định nghĩa của ϕ_n ta suy ra

(4.23) $$\iint_{\Omega} |w_n - w|^p dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n} |\phi_n - 1|^p |w|^p dxdy + \iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |w|^p dxdy .$$

Với mỗi hàm $v \in L^p(\Omega)$ bất kỳ ta đều có

(4.24) $$\iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |v|^p dxdy \to 0 \qquad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Thật vậy, do

$$\iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |v|^p dxdy = \iint_{\Omega} |v|^p \chi_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} dxdy ,$$

trong đó $\chi_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n}$ là hàm đặc trưng của miền $\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n$. Áp dụng định lý hội tụ bị chặn suy ra (4.24) .

Áp dụng (4.24) với v bằng w ta suy ra

(4.25) $$\iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |w|^p dxdy \to 0 \qquad \text{khi} \quad n \to \infty .$$

Chú ý rằng $0 \le \phi_n(x,y) \le 1 \qquad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$, do đó

(4.26) $$\iint_{\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n} |\phi_n - 1|^p |w|^p \, dxdy \le \iint_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} |w|^p \, dxdy = \iint_{\Omega} |w|^p \chi_{\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n} \, dxdy$$

Từ (4.25) và (4.26) suy ra

(4.27) $$\iint_{\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n} |\phi_n - 1|^p |w|^p \, dxdy \quad \to \quad 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Cuối cùng ta thu được (4.20) từ (4.23), (4.25) và (4.27).

- Chứng minh $\partial w_n/\partial y \longrightarrow \partial w/\partial y$ trong $L^p(\Omega)$

$$\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial w_n}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right|^p dxdy = \iint_{\Omega} \left| \phi_n \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy$$

(4.28) $$\le 2^{p-1} \iint_{\Omega} |\phi_n - 1|^p \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|^p dxdy + 2^{p-1} \iint_{\Omega} \left| w \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy \, .$$

Áp dụng (4.20) với w thay bởi $\partial w/\partial y \in L^p(\Omega)$ ta có

(4.29) $$\iint_{\Omega} |\phi_n - 1|^p \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right|^p dxdy \quad \to \quad 0 \qquad \text{khi} \quad n \to \infty .$$

Xét $$\iint_{\Omega} \left| w \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy = \iint_{\Omega} |w|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy$$

(4.30) $$= \iint_{\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n} |w|^p n^p dxdy$$

Từ w (x, φ (x)) = 0 ta suy ra:

(4.31)
$$\begin{aligned} w(x,y) &= w(x,\varphi(x)) + \int_{\varphi(x)}^{y} \frac{\partial w}{\partial y}(x,t)dt \\ &= -\int_{y}^{\varphi(x)} \frac{\partial w}{\partial y}(x,t)dt \, , \quad 0 \le y \le \varphi(x). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta được:

(4.32)
$$\begin{aligned}|w(x,y)| &\le \left(\int_y^{\varphi(x)} dt\right)^{1/p'}\left(\int_y^{\varphi(x)}\left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,t)\right|^p dt\right)^{1/p}\\ &\le (\varphi(x)-y)^{1/p'}\left(\int_y^{\varphi(x)}\left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,t)\right|^p dt\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Ta lại có

(4.33)
$$\begin{aligned}\iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n}|w|^p|n|^p\,dxdy &= \int_0^1 dx\int_{\hat{\varphi}_n(x)}^{\tilde{\varphi}_n(x)}|w|^p n^p dy\\ &\le \int_0^1 dx\int_{\varphi_n(x)-\frac{3}{n}}^{\varphi_n(x)-\frac{2}{n}} n^p(\varphi(x)-y)^{p-1}\left(\int_y^{\varphi(x)}\left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,t)\right|^p dt\right)dy\\ &\le \int_0^1 dx\int_{\varphi_n(x)-\frac{3}{n}}^{\varphi_n(x)-\frac{2}{n}} n^p\left(\frac{3}{n}\right)^{p-1}\left(\int_y^{\varphi(x)}\left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,t)\right|^p dt\right)dy\\ &\le \int_0^1 dx\int_{\varphi_n(x)-\frac{3}{n}}^{\varphi_n(x)-\frac{2}{n}} 3^{p-1}n\left(\int_{\varphi_n(x)-\frac{3}{n}}^{\varphi(x)}\left|\frac{\partial w}{\partial y}(x,t)\right|^p dt\right)dy\\ &\le 3^{p-1}\iint_{\Omega\setminus\hat{\Omega}_n}\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|^p dxdy = 3^{p-1}\iint_{\Omega}\left|\frac{\partial w}{\partial y}\right|^p \chi_{\Omega\setminus\hat{\Omega}_n}dxdy.\end{aligned}$$

Dùng định lý hội tụ bị chặn ta có tích phân sau cùng của vế phải của (4.33) tiến về 0, do đó ta suy từ (4.33)

(4.34)
$$\iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} n^p|w(x,y)|^p\,dxdy \quad \to 0 \qquad \text{khi} \quad n\to\infty .$$

Từ (4.28), (4.29), (4.30), (4.34) ta suy ra (4.22) đúng.

- Chứng minh $\partial w_n/\partial x \longrightarrow \partial w/\partial x$ trong $L^p(\Omega)$

$$\iint_\Omega\left|\frac{\partial w_n}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dxdy = \iint_\Omega\left|\phi_n\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\right|^p dxdy$$

(4.35)
$$\le 2^{p-1}\iint_\Omega|\phi_n-1|^p\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dxdy + 2^{p-1}\iint_\Omega\left|w\frac{\partial\phi_n}{\partial x}\right|^p dxdy$$

Áp dụng (4.20) với w thay bởi $\partial w/\partial x$ ta có:

(4.36) $$\iint_\Omega |\phi_n - 1|^p \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^p dxdy \;\to\; 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty$$

Xét $$\iint_\Omega \left| w\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\right|^p dxdy = \iint_\Omega |w|^p \left|\frac{\partial \phi_n}{\partial x}\right|^p dxdy$$

$$= \iint_{\tilde{\Omega}_n \backslash \hat{\Omega}_n} |w|^p |n\varphi'(x)|^p dxdy$$

(4.37) $$\le \|\varphi'\|^p_{L^\infty(0,1)} \iint_{\tilde{\Omega}_n \backslash \hat{\Omega}_n} |w|^p |n|^p dxdy$$

Tổ hợp (4.34) –(4.37) ta được (4.21).

Bổ đề 4.1 được chứng minh. ■

Lấy $w_n = \phi_n w$, chuyển sang giới hạn trong (4.5), nhờ vào (4.12) –(4.15) ta được

(4.38) $$\left\langle \chi_1 , \frac{\partial w}{\partial x}\right\rangle + \left\langle \chi_2 , \frac{\partial w}{\partial y}\right\rangle + \langle g(x, y, \tilde{u})\sin \tilde{u} , w\rangle$$
$$= \langle G, w\rangle + \int_{\Gamma_1} Hwds \quad , \quad \forall w \in V.$$

Chứng minh tương tự định lý (2.1) suy ra $\chi_1 = M_1\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)$, và $\chi_2 = M_2\left(x, y, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\right)$.

Suy ra ũ là lời giải của (P). Do tính duy nhất lời giải của (P) ta suy ra ũ = u.

Định lý được chứng minh. ■

Sau đây ta sẽ đánh giá tốc độ hội tụ của $\tilde{u}_n$ về lời giải u của (P).

Định lý 4.2:

Giả sử M_1 , M_2 , g, G, H, φ thỏa các giả thiết (H1)-(H9), dãy $\{\varphi_n\}$ thỏa điều kiện (4.1), và (4.2). Giả sử lời giải $u \in V \cap W^{k+1,p}(\Omega)$ thỏa điều kiện $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y \in V$. Khi đó tồn tại hằng số C chỉ phụ thuộc M_1 , M_2 , g, G, H, φ sao cho*

(4.39) $$|\tilde{u}_n - u|_{1,p} \le C^* \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p(p-1)} .$$

Chứng minh:

Đặt

$$\bar{r}_n \quad : \quad V \longrightarrow V_n$$

$\bar{r}_n v \quad = \quad \phi_n v$, trong đó ϕ_n được định nghĩa trong (4.18).

$\bar{e}_n \quad = \quad \tilde{u}_n - u$

(4.40) $\bar{E}_n \quad = \quad u - \bar{r}_n u$

$\bar{d}_n \quad = \quad \tilde{u}_n - \bar{r}_n u \quad = \quad \bar{E}_n + \bar{e}_n$

$\bar{w}_n \quad = \quad \bar{r}_n u$

Ta chú ý rằng với $u \in W^{2,p}(\Omega)$ thỏa u, $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y \in V$. Bằng chứng minh tương tự bổ đề 4.1 ta có $\phi_n u \longrightarrow u$ trong $W^{2,p}(\Omega)$ mạnh, do đó ta chọn β độc lập với n sao cho:

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \beta \quad , \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \beta \ ,$$

$$\left\|\frac{\partial \bar{w}_n}{\partial x}\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \beta \quad , \quad \left\|\frac{\partial \bar{w}_n}{\partial y}\right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \beta \ ,$$

Tương tự trong chứng minh định lý (3.2), chương 3 ta có kết quả sau:

(4.41) $$C_4 \left|\bar{d}_n\right|_{1,p}^p \le C_0 C_0' \left(k_\alpha \sin\alpha + g_{max}\right) \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + 2m_\beta \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} \left|\bar{d}_n\right|_{1,p} .$$

Đặt $\gamma = C_0 C_0' \left(k_\alpha \sin\alpha + g_{max}\right)$. Suy ra

(4.42) $$C_4 \left|\bar{d}_n\right|_{1,p}^p \le \gamma \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + 2m_\beta \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} \left|\bar{d}_n\right|_{1,p}$$

$$\le \gamma \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + 2m_\beta \left(\frac{\left(\varepsilon \left|\bar{d}_n\right|_{1,p}\right)^p}{p} + \frac{1}{p'} \left(\frac{\left|\bar{E}_n\right|_{1,p'}}{\varepsilon} \right)^{p'} \right) .$$

Chọn $\varepsilon > 0$ thỏa $\quad 2m_\beta \dfrac{1}{p} \varepsilon^p = \dfrac{C_4}{2}$.

(4.43) $$\frac{C_4}{2} \left|\bar{d}_n\right|_{1,p}^p \le \gamma \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + \frac{2m_\beta}{p' \varepsilon^{p'}} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'}^{p'}$$

Mà

(4.44) $$\left|\bar{e}_n\right|_{1,p}^p \le 2^{p-1} \left(\left|\bar{d}_n\right|_{1,p}^p + \left|\bar{E}_n\right|_{1,p}^p \right)$$

$$\le \frac{2^p}{C_4} \left(\gamma \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + \frac{m_\beta}{p' \varepsilon^{p'}} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'}^{p'} \right) + 2^{p-1} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p}^p$$

$$= C_5 \left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'} + C_6 \left|\bar{E}_n\right|_{1,p'}^{p'} + 2^{p-1} \left|\bar{E}_n\right|_{1,p}^p ,$$

trong đó $C_5 = \dfrac{2^p}{C_4}\gamma$ và $C_6 = \dfrac{2^p}{C_4}\dfrac{m_\beta}{p'\varepsilon^{p'}}$. Sử dụng bất đẳng thức Holder cho số hạng $|\bar{e}_n|_{1,p}|\bar{E}_n|_{1,p'}$ ta có

(4.45) $$|\bar{e}_n|^p_{1,p} \le C_5\left(\frac{\left(\varepsilon_1|\bar{e}_n|_{1,p}\right)^p}{p} + \frac{1}{p'}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}|\bar{E}_n|_{1,p'}\right)^{p'}\right) + C_6|\bar{E}_n|^{p'}_{1,p'} + 2^{p-1}|\bar{E}_n|^p_{1,p},$$

trong đó $\varepsilon_1 > 0$ được chọn sao cho $C_5\dfrac{1}{p}\varepsilon_1^p = \dfrac{1}{2}$. Ta viết lại (4.45) như sau:

(4.46) $$\frac{1}{2}|\bar{e}_n|^p_{1,p} \le \frac{C_5}{p'}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}|\bar{E}_n|_{1,p'}\right)^{p'} + C_6|\bar{E}_n|^{p'}_{1,p'} + 2^{p-1}|\bar{E}_n|^p_{1,p}.$$

Hay

(4.47) $$|\bar{e}_n|^p_{1,p} \le C_7|\bar{E}_n|^{p'}_{1,p'} + 2^p|\bar{E}_n|^p_{1,p},$$

trong đó $C_7 = \dfrac{2C_5}{p'\varepsilon_1^{p'}} + C_6$.

Do phép nhúng $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^{p'}(\Omega)$ liên tục , ta có:

(4.48) $$|v|_{1,p'} \le C_p|v|_{1,p} \qquad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Áp dụng vào (4.47) ta suy ra

(4.49) $$|\bar{e}_n|^p_{1,p} \le C_7\left(C_p|\bar{E}_n|_{1,p'}\right)^{p'} + 2^p|\bar{E}_n|^p_{1,p} \le C_8|\bar{E}_n|^{p'}_{1,p}$$

trong đó C_8 là hằng số chỉ phụ thuộc M_1, M_2, g, G, H, φ.

Mặt khác, từ $\bar{E}_n = u - \bar{r}_n u = u - \phi_n u$ suy ra

(4.50) $$|\bar{E}_n|^p_{1,p} = |u - \phi_n u|^p_{1,p}$$

$$= \iint_\Omega\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(\phi_n u)\right|^p + \left|\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(\phi_n u)\right|^p\right)dxdy$$

$$= \iint_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}_n} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^p \right) dxdy$$

$$+ \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x} - \phi_n \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right|^p + \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \phi_n \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p \right) dxdy$$

$$\leq 2\beta^p \left|\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n\right| + 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^p \left|\phi_n - 1\right|^p dxdy + 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^p \left|\phi_n - 1\right|^p dxdy$$

$$+ 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right|^p dxdy + 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy \quad .$$

Ta chú ý rằng $0 \leq \phi_n \leq 1$ trên $\hat{\Omega}_n \setminus \tilde{\Omega}_n$. Do đó

(4.51) $$\left|\overline{E}_n\right|_{1,p}^p \leq 2\beta^p \left|\Omega \setminus \tilde{\Omega}_n\right| + 2^p \beta^p \left|\tilde{\Omega}_n \setminus \hat{\Omega}_n\right|$$

$$+ 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right|^p dxdy + 2^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy$$

Dựa vào (4.33) và (4.37), hai số hạng cuối trong vế phải của (4.51) lần lượt được đánh giá như sau:

(4.52) $$\iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial y} \right|^p dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p |n|^p dxdy$$

$$\leq 3^{p-1} \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^p dxdy$$

$$\leq 3^{p-1} \beta^p \left|\Omega \setminus \hat{\Omega}_n\right|$$

(4.53) $$\iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left| \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right|^p dxdy = \iint_{\tilde{\Omega}_n\setminus\hat{\Omega}_n} |u|^p \left|n\varphi'(x)\right|^p dxdy$$

$$\leq 3^{p-1} \beta^p \left|\Omega \setminus \hat{\Omega}_n\right| \left\|\varphi'\right\|_{L^\infty(0,1)}$$

Từ (4.51) – (4.53) suy ra

(4.54) $$\left|E_n\right|_{1,p}^p \leq \frac{\beta^p}{n} \left(4 + 2^p + 3.6^{p-1}\left(1 + \left\|\varphi'\right\|_{L^\infty(0,1)}\right)\right)$$

Từ (4.49) và (4.54) suy ra

(4.55) $$\left|\bar{e}_n\right|_{1,p} \le C^* \Big/ n^{\frac{1}{p(p-1)}}$$

C* chỉ phụ thuộc M_1 , M_2 , g, G, H, φ.

Từ đó suy ra (4.39).

Định lý 4.2 được chứng minh. ■

II. SỰ HỘI TỤ LỜI GIẢI CỦA BÀI TOÁN XẤP XỈ PHẦN TỬ HỮU HẠN BÀI TOÁN BIÊN ĐA GIÁC VỀ LỜI GIẢI CHÍNH XÁC CỦA BÀI TOÁN BIÊN CONG

Cho { φ }$_{n=}$ là dãy các hàm liên tục trên [0,1] và bậc nhất từng khúc thỏa các điều kiện (4.1) và (4.2).

Cố định n.

1. Gọi u_n là lời giải của bài toán:

Bài toán (P_n):

Đặt $\Omega_n = \left\{(x,y)\in\Omega \ : \ \begin{matrix} 0<x<1 \ , \\ 0<y<\varphi_n(x) \end{matrix}\right\}$, $\Gamma_{0n} = \{(x,\varphi_n(x)) \ : \ 0\le x\le 1\}$.

Tìm $u_n \in V_n = \left\{ v_n \in W^{1,p}(\Omega_n) \ : \ v_n\big|_{\Gamma_{0n}} = 0 \right\}$, $p>2$ *, sao cho*

$$\iint_{\Omega_n}\left[M_1\left(x,y,\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)\frac{\partial w_n}{\partial x} + M_2\left(x,y,\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)\frac{\partial w_n}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\iint_{\Omega_n} g(x,y,u_n)\sin u_n w_n dxdy = \iint_{\Omega_n} G w_n + \int_{\Gamma_1} H w_n ds \quad , \quad \forall w_n \in V_n \ .$$

Mở rộng u_n lên Ω thành $\tilde{u}_n$:

$$\tilde{u}_n = \begin{cases} u_n & (x,y)\in\Omega_n \ , \\ 0 & (x,y)\in\Omega\setminus\Omega_n \ . \end{cases}$$

2. Khi đó $\tilde{u}_n$ là lời giải của bài toán :

Bài toán ($\tilde{P}_n$):

Tìm $\tilde{u}_n \in \tilde{V}_n = \left\{ v_n \in W^{1,p}(\Omega_n) \ : \ v_n\big|_{\Omega\setminus\Omega_n} = 0 \right\}$ *$\tilde{u}_n \in \tilde{V}_n$ thỏa*

$$\left\langle M_1\left(x,y,\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}\right),\frac{\partial w_n}{\partial x}\right\rangle+\left\langle M_2\left(x,y,\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}\right),\frac{\partial w_n}{\partial y}\right\rangle$$
$$+\left\langle g(x,y,\tilde{u}_n)\sin\tilde{u}_n\,,\,w_n\right\rangle=\left\langle G,w_n\right\rangle+\int_{\Gamma_1}Hw_n ds\quad,\qquad\forall w_n\in\tilde{V}_n\;.$$

Cho $n \longrightarrow \infty$ thì $\tilde{u}_n \longrightarrow u$ trong V (định lý 4.1) và có đánh giá sai số

$$\left|\tilde{u}_n-u\right|_{1,p}\le C^*\Big/ n^{\frac{1}{p(p-1)}}$$

3. Cố định n và cho trước h > 0 đủ nhỏ.

Xét một tam giác phân τ_h của miền Ω_n bởi các tam giác K có diam (K) < h $\forall$ K $\in \tau_h$. Gọi u_n^h là lời giải của bài toán:

Bài toán (P_n^h) :

Tìm $u_n^h\in V_n^h=\left\{\;v\in C(\overline{\Omega}_n)\;:\;v_n\big|_{\Gamma_{0n}}=0\quad v\big|_K\in IP_k\,,\forall K\in\tau_h\right\}$ *sao cho*

$$\iint_{\Omega_n}\left[M_1\left(x,y,\frac{\partial u_n^h}{\partial x}\right)\frac{\partial w_h}{\partial x}+M_2\left(x,y,\frac{\partial u_n^h}{\partial y}\right)\frac{\partial w_h}{\partial y}\right]dxdy$$
$$+\iint_{\Omega_n}g(x,y,u_n^h)\sin u_n^h w_h dxdy=\iint_{\Omega_n}Gw_h+\int_{\Gamma_1}Hw_h ds\quad,\qquad\forall w_h\in V_n^h\;.$$

Mở rộng u_n^h như sau:

$$\tilde{u}_n^h=\begin{cases}u_n^h & (x,y)\in\Omega_n\quad,\\ 0 & (x,y)\in\Omega\setminus\Omega_n\quad.\end{cases}$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 4.3:

- *Cho M_1, M_2, g, G, H, φ thỏa các giả thiết (H1) –(H9).*
- *Giả sử $\{\varphi_n\}$ thỏa (4.1).*
- *Giả sử họ tam giác phân τ_h chính quy.*

Khi đó $\tilde{u}_n^h$ hội tụ về lời giải chính xác u của bài toán (P) với đánh giá sai số như sau:

(4.56) $$\left|\tilde{u}_n^h-u\right|_{1,p}\le C^*\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p(p-1)}+C_n h^{k\,1/p-1}\left|u_n\right|_{k+1,p,\Omega_n}$$

Chứng minh:

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{u}_n^h - u\right|_{1,p,\Omega} &\le \left|\tilde{u}_n^h - \tilde{u}_n\right|_{1,p,\Omega} + \left|\tilde{u}_n - u\right|_{1,p,\Omega} \\
&= \left|u_n^h - u_n\right|_{1,p,\Omega_n} + \left|\tilde{u}_n - u\right|_{1,p,\Omega} \\
&\le C_n h^{k/p-1} \left|u_n\right|_{k+1,p,\Omega_n} + C^* \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p(p-1)}
\end{aligned}
$$

Ta được (4.56).

Định lý được chứng minh. ■

CHƯƠNG 5 :

ÁP DỤNG TÍNH TOÁN SỐ

I. PHÁT BIỂU BÀI TOÁN:

Xét bài toán (0.1) với :

(5.1) $$\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{4},$$

(5.2) $$M_1(x,y,z) = M_2(x,y,z) = z,$$

(5.3) $$g(x,y,z) = z,$$

(5.4) $$G(x,y) = \frac{3}{2}x + x\left(\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y\right)\right)\sin\left(x\left(1 - \frac{1}{4}x^2 - y\right)\right)$$

$$H(x,y) = \begin{cases} (y-1), & 0 < y < \varphi(0) = 1, x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, y = 0, \\ \left(\frac{1}{4} - y\right), & 0 < y < \varphi(1) = \frac{3}{4}, x = 1. \end{cases}$$

Bài toán này có nghiệm chính xác là $u(x,y) = x\left(1 - \frac{x^2}{4} - y\right)$.

Dễ dàng kiểm chứng các hàm φ, g, G, H, M_1, M_2 như định nghĩa trong (5.1) –(5.5) thỏa các giả thiết (H1') – (H7'). Vậy bài toán tìm lời giải xấp xỉ bằng phương pháp phần tử hữu hạn của u trên $\mathscr{V}$ hội tụ về lời giải chính xác theo các định lý 3.3 và 3.4 chương 3.

II. THUẬT TOÁN:

Dưới đây ta sẽ đề nghị một thuật toán xấp xỉ lời giải chính xác của bài toán.

- **Bước 1**: Xấp xỉ miền Ω và chọn lưới tam giác trên miền xấp xỉ.
- **Bước 2**: Xây dựng bài toán xấp xỉ phần tử hữu hạn trên miền Ω_n có biên đa giác.
- **Bước 3**: Dùng xấp xỉ Newton đưa bài toán phi tuyến về bài toán tuyến tính.
- **Bước 4**: Xây dựng các ma trận cứng và vector tải cho bài toán biến phân.

- **Bước 5**: Giải hệ phương trình thu được từ bước 4 xác định lời giải xấp xỉ nút của u.

<u>Bước 1:</u> *Xấp xỉ miền Ω và chọn lưới tam giác trên miền xấp xỉ.*

- Cho trước sai số ε.
- Từ công thức (4.46), xác định n, h sao cho $\left| u - \tilde{u}_h^n \right|_{1,p} \le \varepsilon$.
- Chia đều đoạn [0,1] thành m đoạn , m đoạn này chia Ω thành m hình thang cong, trên mỗi hình thang cong ta lại chia thành các tam giác có đỉnh trên cạnh bên hình thang sao cho phép chia tam giác thỏa :
    - Tính chính quy.
    - Đường kính mỗi tam giác không quá h.
    - N = Tổng số điểm nút trên toàn miền – số nút trên biên Γ_0 .
    - E = Tổng số phần tử (tam giác) trên toàn miền – số tam giác có đỉnh trên Γ_0 .
- Xác định Γ_{0n} bằng cách nối các đỉnh nằm trên Γ_0 của các tam giác.

<u>Bước 2:</u> *Xây dựng bài toán xấp xỉ phần tử hữu hạn trên miền Ω_n có biên đa giác.*

Bước này được thực hiện như trong các chương 3, 4. Bài toán tìm u $\in \mathscr{V}$ thỏa (5.1) – (5.5) được đưa về bài toán xấp xỉ sau:

Bài toán (P_h) :

Tìm $u_h \in V_h$ có dạng

(5.5) $$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_{jh} w_j(x,y)$$

sao cho

(5.6) $$\begin{aligned} P_j(\vec{u}_h) = & \iint_{\Omega_n} \left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial w_j}{\partial y} \right) dxdy \\ & + \iint_{\Omega_n} u_h \sin u_h w_j dxdy - \iint_{\Omega_n} G(x,y) w_j dxdy \\ & - \int_{\Gamma_{1n}} H w_j ds = 0 \quad , \qquad\qquad j = 1..N, \end{aligned}$$

trong đó Ω_n , V_h được định nghĩa trong chương 4, các w_j là các hàm cơ sở của V_h , N là số chiều của V_h

$$\vec{u}_h = (u_{1h}, u_{2h}, ..., u_{Nh}) .$$

Hay nói cách khác, bài toán (P_h) được phát biểu lại như sau:

Tìm $\vec{u}_h$ sao cho

(5.7) $$\vec{P}(\vec{u}_h) = 0,$$

với

(5.8) $$\vec{P}(\vec{u}_h) = \left(P_1(\vec{u}_h), P_2(\vec{u}_h), ..., P_N(\vec{u}_h)\right)$$

Bước 3: *Dùng xấp xỉ Newton đưa bài toán phi tuyến về bài toán tuyến tính.*

Hệ phương trình (5.8) là hệ phi tuyến. Để giải hệ này ta sử dụng phương pháp xấp xỉ Newton như sau:

- Cho trước $\vec{u}_h^{(0)}$.
- Giả sử biết $\vec{u}_h^{(m-1)}$.
- Tìm $\vec{u}_h^{(m)} = \vec{v}_h^{(m)} + \vec{u}_h^{(m-1)}$, trong đó $\vec{v}_h^{(m)}$ là nghiệm của hệ phương trình đại số tuyến tính sau:

(5.9) $$J_P\left(\vec{u}_h^{(m-1)}\right)\vec{v}_h^{(m)} = -P\left(\vec{u}_h^{(m-1)}\right),$$

với

(5.10) $$J_P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_1}{\partial u_N} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_2}{\partial u_N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial P_N}{\partial u_1} & \dfrac{\partial P_N}{\partial u_2} & \cdots & \dfrac{\partial P_N}{\partial u_N} \end{pmatrix}.$$

Bước 4: *Xây dựng các ma trận cứng và vector tải cho bài toán biến phân.*

Với các w_j là các hàm cơ sở bậc nhất có tính chất

(5.11) $$w_j(M_k) = \delta_{jk},$$

từ công thức (5.7) ta tính được

(5.12) $$\begin{aligned} P_j(\vec{u}_h) &= \sum_{s=1}^{E}\iint_{K_s}\left(\frac{\partial u_h}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_h}{\partial y}\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)dxdy \\ &+ \sum_{s=1}^{E}\iint_{K_s} u_h \sin u_h w_j dxdy - \sum_{s=1}^{E}\iint_{K_s} G(x,y) w_j dxdy \\ &- \int_{\Gamma_{1n}} H w_j ds = 0, \qquad j = 1..N. \end{aligned}$$

Mặt khác,

(5.13)
$$\frac{\partial P_i}{\partial u_j}(\vec{u}_h) = \sum_{s=1}^{E}\iint_{K_s} 3\left(\frac{\partial w_i}{\partial x}\frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial y}\frac{\partial w_j}{\partial y}\right)dxdy$$
$$+\sum_{s=1}^{E}\iint_{K_s}(\sin u_h + u_h\cos u_h)w_i w_j dxdy \quad .$$

Từ đó ta tính được ma trận cứng và vector tải.

<u>Bước 5</u>: Giải hệ phương trình thu được từ bước 4 xác định lời giải xấp xỉ nút của u.

III. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN:

1. Đồ thị của u_{ex} :

2. Trường hợp lưới gồm 72 nút, sau 10 bước lặp ta có kết quả sau :

X	Y	U_0	U_{ex}	U	Sai số	Max sai số tại 8 nút liên tiếp
0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0966
0.000	0.125	0.0223	0.1115	0.1038	0.0077	
0.000	0.250	0.0396	0.1981	0.1918	0.0063	
0.000	0.375	0.0527	0.2635	0.2620	0.0015	
0.000	0.500	0.0625	0.3125	0.3125	0.0000	
0.000	0.625	0.0701	0.3507	0.3413	0.0094	
0.000	0.750	0.0770	0.3848	0.3464	0.0384	
0.000	0.875	0.0845	0.4224	0.3258	0.0966	
0.125	0.000	0.0000	0.0000	0.0139	0.0139	0.1139
0.125	0.125	0.0220	0.1098	0.1139	0.0041	
0.125	0.249	0.0392	0.1958	0.1982	0.0024	
0.125	0.374	0.0523	0.2616	0.2648	0.0032	
0.125	0.498	0.0624	0.3118	0.3119	1E-04	
0.125	0.623	0.0704	0.3521	0.3375	0.0146	
0.125	0.747	0.0778	0.3891	0.3397	0.0494	
0.125	0.872	0.0861	0.4303	0.3164	0.1139	
0.250	0.000	0.0000	0.0000	0.0278	0.0278	0.1258
0.250	0.123	0.0215	0.1074	0.1233	0.0159	
0.250	0.246	0.0385	0.1923	0.2035	0.0112	
0.250	0.369	0.0516	0.2582	0.2664	0.0082	
0.250	0.492	0.0619	0.3096	0.3104	0.0008	
0.250	0.615	0.0704	0.3519	0.3334	0.0185	
0.250	0.738	0.0783	0.3913	0.3337	0.0576	
0.250	0.862	0.0870	0.4351	0.3093	0.1258	
0.375	0.000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0417	0.1319
0.375	0.121	0.0208	0.1042	0.1321	0.0279	
0.375	0.241	0.0375	0.1876	0.2078	0.0202	
0.375	0.362	0.0507	0.2534	0.2671	0.0137	
0.375	0.482	0.0611	0.3057	0.3081	0.0024	
0.375	0.603	0.0699	0.3496	0.3293	0.0203	
0.375	0.724	0.0782	0.3910	0.3287	0.0623	
0.375	0.844	0.0873	0.4366	0.3047	0.1319	
0.500	0.000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0556	0.1317
0.500	0.117	0.0201	0.1003	0.1403	0.0400	
0.500	0.234	0.0363	0.1816	0.2113	0.0297	
0.500	0.352	0.0494	0.2469	0.2668	0.0199	
0.500	0.469	0.0600	0.2999	0.3053	0.0054	
0.500	0.586	0.0690	0.3451	0.3252	0.0199	

0.500	0.703	0.0776	0.3879	0.3248	0.0631	
0.500	0.820	0.0868	0.4342	0.3025	0.1317	
0.625	0.000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0694	0.1252
0.625	0.113	0.0191	0.0957	0.1481	0.0524	
0.625	0.226	0.0349	0.1744	0.2141	0.0397	
0.625	0.338	0.0477	0.2387	0.2659	0.0272	
0.625	0.451	0.0584	0.2919	0.3020	0.0101	
0.625	0.564	0.0676	0.3380	0.3212	0.0168	
0.625	0.677	0.0763	0.3815	0.3218	0.0597	
0.625	0.790	0.0855	0.4277	0.3025	0.1252	
0.750	0.000	0.0000	0.0000	0.0833	0.0833	0.1127
0.750	0.107	0.0181	0.0904	0.1556	0.0652	
0.750	0.215	0.0332	0.1659	0.2163	0.0504	
0.750	0.322	0.0457	0.2287	0.2643	0.0356	
0.750	0.430	0.0563	0.2816	0.2984	0.0168	
0.750	0.537	0.0656	0.328	0.3172	0.0108	
0.750	0.645	0.0743	0.3716	0.3196	0.0052	
0.750	0.752	0.0834	0.4169	0.3042	0.1127	
0.875	0.000	0.0000	0.0000	0.0972	0.0972	0.0972
0.875	0.101	0.0169	0.0844	0.1627	0.0783	
0.875	0.202	0.0312	0.1560	0.2181	0.0621	
0.875	0.303	0.0433	0.2167	0.2623	0.0456	
0.875	0.405	0.0538	0.2688	0.2943	0.0255	
0.875	0.505	0.0630	0.3148	0.3132	0.0016	
0.875	0.606	0.0716	0.3580	0.3177	0.0403	
0.875	0.708	0.0803	0.4017	0.3070	0.0947	
1.000	0.000	0.0000	0.0000	0.1111	0.1111	0.1111
1.000	0.094	0.0155	0.0776	0.1696	0.0092	
1.000	0.188	0.0289	0.1447	0.2194	0.0747	
1.000	0.290	0.0405	0.2026	0.2597	0.0571	
1.000	0.375	0.0506	0.2531	0.2898	0.0367	
1.000	0.468	0.0597	0.2983	0.3088	0.0105	
1.000	0.563	0.0681	0.3404	0.3158	0.0246	
1.000	0.656	0.0764	0.3821	0.3101	0.0072	

3. Trường hợp lưới gồm 99 nút, sau 10 bước lặp ta được:

X	Y	U_0	U_{ex}	U	Sai số	Max sai số tại 9 nút liên tiếp
0.000	0.000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0966
0.000	0.125	0.0223	0.1115	0.1038	0.0077	
0.000	0.250	0.0396	0.1981	0.1918	0.0063	
0.000	0.375	0.0527	0.2635	0.2620	0.0015	
0.000	0.50	0.0625	0.3125	0.3125	0.0000	
0.000	0.625	0.0701	0.3507	0.3413	0.0094	
0.000	0.750	0.0770	0.3848	0.3464	0.0384	
0.000	0.875	0.0845	0.4224	0.3258	0.0966	
0.125	0.000	0.0000	0.0000	0.0139	0.0139	0.1139
0.125	0.125	0.0220	0.1098	0.1139	0.0041	
0.125	0.249	0.0392	0.1958	0.1982	0.0024	
0.125	0.374	0.0523	0.2616	0.2648	0.0032	
0.125	0.498	0.0624	0.3118	0.3119	1E-04	
0.125	0.623	0.0704	0.3521	0.3375	0.0146	
0.125	0.747	0.0778	0.3891	0.3397	0.0494	
0.125	0.872	0.0861	0.4303	0.3164	0.1139	
0.250	0.000	0.0000	0.0000	0.0278	0.0278	0.1258
0.250	0.123	0.0215	0.1074	0.1233	0.0159	
0.250	0.246	0.0385	0.1923	0.2035	0.0112	
0.250	0.369	0.0516	0.2582	0.2664	0.0082	
0.250	0.492	0.0619	0.3096	0.3104	0.0008	
0.250	0.615	0.0704	0.3519	0.3334	0.0185	
0.250	0.738	0.0783	0.3913	0.3337	0.0576	
0.250	0.861	0.0870	0.4351	0.3093	0.1258	
0.375	0.000	0.0000	0.0000	0.0417	0.0417	0.1319
0.375	0.121	0.0208	0.1042	0.1321	0.0279	
0.375	0.241	0.0375	0.1876	0.2078	0.0202	
0.375	0.362	0.0507	0.2534	0.2671	0.0137	
0.375	0.482	0.0611	0.3057	0.3081	0.0024	
0.375	0.603	0.0699	0.3496	0.3293	0.0203	
0.375	0.724	0.0782	0.391	0.3287	0.0623	
0.375	0.844	0.0873	0.4366	0.3047	0.1319	
0.500	0.000	0.0000	0.0000	0.0556	0.0556	0.1317
0.500	0.117	0.0201	0.1003	0.1403	0.0400	
0.500	0.234	0.0363	0.1816	0.2113	0.0297	
0.500	0.352	0.0494	0.2469	0.2668	0.0199	
0.500	0.469	0.0600	0.2999	0.3053	0.0054	
0.500	0.586	0.0690	0.3451	0.3252	0.0199	
0.500	0.703	0.0776	0.3879	0.3248	0.0631	

0.500	0.820	0.0868	0.4342	0.3025	0.1317	
0.625	0.000	0.0000	0.0000	0.0694	0.0694	0.1252
0.625	0.113	0.0191	0.0957	0.1481	0.0524	
0.625	0.226	0.0349	0.1744	0.2141	0.0397	
0.625	0.338	0.0477	0.2387	0.2659	0.0272	
0.625	0.451	0.0584	0.2919	0.302	0.0101	
0.625	0.564	0.0676	0.3380	0.3212	0.0168	
0.625	0.677	0.0763	0.3815	0.3218	0.0597	
0.625	0.790	0.0855	0.4277	0.3025	0.1252	
0.750	0.000	0.0000	0.0000	0.0833	0.0833	0.1127
0.750	0.107	0.0181	0.0904	0.1556	0.0652	
0.750	0.215	0.0332	0.1659	0.2163	0.0504	
0.750	0.322	0.0457	0.2287	0.2643	0.0356	
0.750	0.431	0.0563	0.2816	0.2984	0.0168	
0.750	0.537	0.0656	0.328	0.3172	0.0108	
0.750	0.645	0.0743	0.3716	0.3196	0.052	
0.750	0.752	0.0834	0.4169	0.3042	0.1127	
0.875	0.000	0.0000	0.0000	0.0972	0.0972	0.0972
0.875	0.101	0.0169	0.0844	0.1627	0.0783	
0.875	0.202	0.0312	0.1560	0.2181	0.0621	
0.875	0.303	0.0433	0.2167	0.2623	0.0456	
0.875	0.404	0.0538	0.2688	0.2943	0.0255	
0.875	0.505	0.0630	0.3148	0.3132	0.0016	
0.875	0.606	0.0716	0.3580	0.3177	0.0403	
0.875	0.708	0.0803	0.4017	0.3070	0.0947	
1.000	0.000	0.0000	0.0000	0.1111	0.1111	0.1111
1.000	0.094	0.0155	0.0776	0.1696	0.0920	
1.000	0.188	0.0289	0.1447	0.2194	0.0747	
1.000	0.281	0.0405	0.2026	0.2597	0.0571	
1.000	0.375	0.0506	0.2531	0.2898	0.0367	
1.000	0.469	0.0597	0.2983	0.3088	0.0105	
1.000	0.563	0.0681	0.3404	0.3158	0.0246	
1.000	0.656	0.0764	0.3821	0.3101	0.0720	

KẾT LUẬN

Ở một mức độ nhất định, luận văn đã giải quyết được những vấn đề đặt ra trong chương mở đầu. Các kết quả đã được trình bày trong các chương 1, 2, và 3. Nhìn chung, luận văn đã đạt được một số kết quả :

1. Chứng minh sự tồn tại và duy nhất lời giải của bài toán (0.1) – (0.3). Kết quả thu được trong luận văn đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [5],[6].
2. Xấp xỉ lời giải chính xác bằng lời giải số qua các bước:
   - Xấp xỉ lời giải chính xác bài toán (0.1)-(0.3) trong trường hợp Ω xác định bởi hàm φ liên tục và bậc nhất từng khúc trên [0 , 1], tức là biên $\partial\Omega$ là đa giác. Cho ra đánh giá sai số giữa lời giải xấp xỉ và lời giải chính xác theo một cấp độ phụ thuộc vào tính "trơn" của lời giải chính xác.

     Tìm kết quả cụ thể ứng với trường hợp riêng $M_1(x,y,z) = M_2(x,y,z) = z$. Kết quả trong phần này tổng quát hóa các kết quả trong [5].
   - Xấp xỉ biên cong Γ_0 bởi biên gấp khúc. Kết quả của phần này là các đánh giá sai số giữa lời giải phần tử hữu hạn và lời giải chính xác trong trường hợp Ω_n.
   - Đánh giá được sai số giữa lời giải xấp xỉ bằng phần tử hữu hạn trên Ω_n và lời giải chính xác trên Ω.
3. Tính toán cụ thể trên một ví dụ với M_1, M_2, G, H, g, φ cho trước.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **H. Brézis**, *Analyse Fonnctionelle – Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[2] **P.G. Ciarlet**, *The finite element method for elliptic problems*, North Holland, 1977.

[3] **Bùi Tiến Dũng**, *Phương pháp hội tụ yếu cho bài toán biến phân*, Luận văn Thạc sỹ Toán học, Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh, 1997.

[4] **J.L. Lions**, *Quelques méthodes des résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[5] **Nguyễn Thành Long, Trần Văn Lăng**, *The problem of buckling of a nonlinearly elastic bar immersed in a fluid*, Vietnam J. of Math. , Vol. 24, (1996), 131-142.

[6] **M. Tucsnak**, *Buckling of nonlinearly elastic rods immersed in a fluid*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R.S. de Roumania, Tom 33(81), No. 2 (1989), 173-181.