BỘ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN XUÂN MỸ

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CHO MIỀN NHIỀU CHIỀU

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

CHUYÊN NGÀNH : TOÁN GIẢI TÍCH
MÃ SỐ : 1. 01. 01

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
1-1999

Các Thầy Hướng Dẫn:

PTS Nguyễn Thành Long
Ban Toán _ Tin học
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Thành Phố Hồ Chí Minh

PTS Nguyễn Hội Nghĩa
Ban Đào Tạo Sau Đại Học
Đại Học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh

Thầy Nhận Xét 1:

GS-PTS Dương Minh Đức
Khoa Toán
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Thành Phố Hồ Chí Minh

Thầy Nhận Xét 2:

PTS Đậu Thế Cấp
Khoa Toán
Trường Sĩ Quan Vihempich

Người Thực Hiện:

Nguyễn Xuân Mỹ
Ban Toán _ Tin học
Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Thành Phố Hồ Chí Minh

LUẬN VĂN ĐƯỢC BẢO VỆ TẠI
HỘI ĐỒNG CHẤM LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

*Lời đầu tiên, tôi xin kính gởi đến Thầy **Nguyễn Thành Long** lòng biết ơn sâu sắc về sự tận tình giúp đỡ của thầy đối với tôi trong suốt khóa học và nhất là trong việc hoàn thành luận văn này.*

*Tôi cũng xin chân thành cảm ơn Thầy **Nguyễn Hội Nghĩa** đã cùng Thầy **Nguyễn Thành Long** giúp đỡ tôi rất nhiều trong thời gian thực hiện luận văn .*

*Xin chân thành cảm ơn Thầy **Dương Minh Đức** và Thầy **Đậu Thế Cấp** đã đọc và cho những ý kiến quý báu cũng như những lời phê bình bổ ích đối với luận văn.*

*Tôi cũng xin cảm ơn Thầy **Trần Hữu Bổng** đã dành cho tôi thời gian quý báu và những góp ý sâu sắc cho buổi bảo vệ luận văn.*

*Xin cảm ơn Thầy **Đỗ Công Khanh** và Thầy **Võ Đăng Thảo** đã giúp tôi về thời gian và một số điều kiện để hoàn tất sớm chương trình học.*

*Xin cảm ơn quý **Thầy Cô** thuộc khoa Toán, Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên, Trường Đại Học Sư Phạm Thành Phố Hồ Chí Minh đã tận tình hướng dẫn và cung cấp cho tôi những tư liệu cần thiết trong suốt thời gian học tập.*

*Xin cảm ơn quý **Thầy Cô** thuộc Phòng quản lý Sau Đại học Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Thành Phố Hồ Chí Minh đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi về thủ tục hành chính trong khóa học.*

*Cảm ơn **Các Bạn học viên** lớp Cao học khóa 6 đã hỗ trợ rất nhiều cho tôi về mọi mặt trong thời gian qua.*

Nguyễn Xuân Mỹ

MỤC LỤC

Chương 1

PHẦN MỞ ĐẦU

Chúng tôi xét hệ phương trình hàm sau đây:

(1.1) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[x, f_j(S_{ijk}(x))] + g_i(x),$$

với $i = \overline{1,n}$, $x \in \Omega_i$

trong đó

$\Omega_i \subset R^p$ là tập compact hoặc không,

$g_i : \Omega_i \to R$, $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$, $a_{ijk} : \Omega_i \times R \to R$,

$1 \le i, j \le n$, $1 \le k \le m$,

là các hàm liên tục cho trước,

$f_i : \Omega_i \to R$ là các ẩn hàm.

Trong [1], các tác giả Wu, Xuan, Zhu đã nghiên cứu hệ (1.1) với $\Omega_i = [-b, b]$, $p = 1$, $m = n = 2$, $S_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất và

(1.2) $$a_{ijk}(x, y) = \tilde{a}_{ijk}\, y,$$

trong đó $\tilde{a}_{ijk}$ là các hằng số thực. Trong trường hợp này lời giải của hệ (1.1), (1.2) được xấp xỉ bằng một dãy qui nạp hội tụ đều và nó cũng ổn định đối với các hàm g_i.

Trường hợp $m = n = p = 1$, các tác giả Kostrzewski [2],[3], Lupa [4] đã nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất lời giải của phương trình hàm sau

(1.3) $$f(x) = a(x, f(S(x))),\ x \in [a,b],$$

trong không gian hàm BC[a,b].

Một trường hợp riêng với phương trình hàm Golab-Schinzel

(1.4) $$f(x) = \frac{f(x^2)}{x+1},$$

các tác giả Knop, Kostrzewski, Lupa, Wrobel trong [6] đã xây dựng tường minh lời giải không tầm thường f(x) thỏa các điều kiện

(1.5) tồn tại $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = f(-1^-)$ và $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0^+)$

như sau

(1.6) $$f(x) = \begin{cases} f(0^+)(1-x), & x \neq -1, \\ c, & x = -1, \end{cases}$$

trong đó c là một hằng số tùy ý.

Trong trường hợp $p = 1$, $\Omega_i = \Omega \subset R$, $i = \overline{1,n}$, là khoảng đóng bị chặn hay không bị chặn, các tác giả Long, Nghĩa, Khôi, Ruy [5], bằng định lý điểm bất động Banach đã thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất lời giải của hệ (1.1) và lời giải cũng ổn định đối với các hàm g_i.

Trong trường hợp a_{ijk} giống như (1.2) và $S_{ijk}(x)$ là các nhị thức bậc nhất, $g_i \in C^r(\Omega, R)$, $\Omega = [-b,b]$, trong [5] thu được khai triển Maclaurin của lời giải hệ (1.1) đến cấp r. Hơn nữa, nếu $g_i(x)$ là các đa thức bậc r thì lời giải hệ (1.1) cũng vậy.

Luận văn được sắp xếp theo 5 chương

_ Chương mở đầu là phần giới thiệu hệ phương trình hàm và điểm qua sơ nét các kết quả đã có trước đó, tiếp theo là giới thiệu các phần trình bày trong luận văn.

_ Chương 2 là phần giới thiệu một số ký hiệu, các không gian hàm sử dụng trong luận văn và một số kết quả sẽ dùng cho các chương sau.

_ Chương 3 trình bày một số kết quả tồn tại và duy nhất lời giải của hệ phương trình hàm (1.1), sự ổn định của lời giải đối với các hàm g_i. Một số kết quả trong chương này cũng đã tổng quát hóa các kết quả trong [1], [5] mà chứa trường hợp p = 1 như là một trường hợp riêng.

_ Chương 4 là phần khảo sát khai triển Maclaurin của lời giải của hệ (1.1) với trường hợp $S_{ijk}(x) = B^{ijk}x + c^{ijk}$, với B^{ijk} là ma trận cấp p, vectơ $c^{ijk} \in R^p$ thỏa một số điều kiện nào đó .

Kết quả thu được trong phần này cho một công thức biểu diễn lời giải của hệ phương trình hàm (1.1) và nếu g_i là đa thức thì lời giải thu được cũng là đa thức đồng bậc với g_i. Hơn nữa nếu g_i liên tục, lời giải sẽ được xấp xỉ bởi dãy các đa thức hội tụ đều. Kết quả thu đượcđã mở rộng thực sự các kết quả trong [1], [5].

_ Chương 5 là phần khảo sát thuật giải lặp cấp 2 của hệ (1.1). Cũng trong chương này, chúng tôi xét một dạng khác của hệ phương trình hàm tuyến tính mà có thể đưa về và áp dụng các kết quả của hệ (1.1).

Cuối cùng là phần kết luận và các tài liệu tham khảo.

Chương 2

CÁC KÝ HIỆU VÀ KẾT QUẢ CHUẨN BỊ

2.1 Định lý điểm bất động Banach

Chúng ta thường xuyên sử dụng định lý điểm bất động Banach sau:

Định lý 2.1

Cho X là không gian Banach với chuẩn $\|.\|$, $K \subset X$ *là tập đóng.*

Cho $T : K \to K$ *là ánh xạ thỏa mãn*

Tồn tại số thực σ, $0 \le \sigma < 1$ *sao cho*

(2.1) $\|T(x) - T(y)\| \le \sigma\|x - y\|$, $\forall x, y \in K$.

Khi đó ta có

(i) Tồn tại duy nhất $x_* \in K$ *sao cho* $x_* = T(x_*)$.

(ii) Với mỗi $x_0 \in K$, *xét dãy* $\{x_\nu\}$ *cho bởi*

$$x_\nu = T(x_{\nu-1}),\ \nu = 1,2,\ldots$$

ta có

(j) $\lim_{\nu\to\infty}\|x_\nu - x_*\| = 0$,

(jj) $\|x_\nu - x_*\| \le \|x_0 - T(x_0)\|\dfrac{\sigma^\nu}{1-\sigma}$, $\forall \nu = 1,2,\ldots$

Chứng minh định lý 2.1 có thể tìm thấy trong các quyển sách về nhập môn giải tích.

2.2 Các đa chỉ số

Nếu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p)$ là bộ p-thứ tự các số nguyên không âm α_j, ta gọi α là p-đa chỉ số.

Một điểm $x \in R^p$ được ký hiệu $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$, ta ký hiệu x^α là đơn thức bậc $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_p$ sau

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p} \tag{2.2}$$

Tương tự nếu $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $1 \le j \le p$, ký hiệu toán tử đạo hàm riêng cấp 1 theo biến thứ j thì

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_p^{\alpha_p} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_p^{\alpha_p}}$$

chỉ một toán tử đạo hàm riêng cấp $|\alpha|$.

Ta cũng ký hiệu

$$D^{(0,0,...,0)} f = f.$$

2.3 Các không gian hàm

Giả sử $\Omega_i \subset R^p$, $1 \le i \le n$, ta đặt $X_i = C_b(\Omega_i; R)$ là không gian Banach các hàm số liên tục bị chặn $f : \Omega_i \to R$ với chuẩn

$$\|f\|_{X_i} = \sup_{x \in \Omega_i} |f(x)|, \quad f \in X_i. \tag{2.3}$$

Nếu Ω_i là tập compact, ta đặt $X_i = C(\Omega_i; R)$ là không gian Banach các hàm số liên tục $f : \Omega_i \to R$ với chuẩn như (2.3).

Ta cũng lưu ý rằng nếu Ω_i là tập mở thì $C(\Omega_i;R)$ cũng ký hiệu là không gian vector các hàm số $f:\Omega_i \to R$ liên tục. Hơn nữa các hàm trong $C(\Omega_i;R)$ không nhất thiết bị chặn trong Ω_i. Nếu $f \in C(\Omega_i;R)$ bị chặn và liên tục đều trên Ω_i thì nó có duy nhất một nới rộng liên tục trên bao đóng $\overline{\Omega}_i$ của Ω_i. Do đó, ta định nghĩa $C(\overline{\Omega}_i;R)$ là không gian vector xác định bởi

$$C(\overline{\Omega}_i;R) = \{\, f \in C(\Omega_i;R) : f \text{ bị chặn và liên tục đều trên } \Omega_i \,\}.$$

Mặt khác $C(\overline{\Omega}_i;R)$ cũng là một không gian Banach đối với chuẩn (2.3).

Với chú ý tương tự trong trường hợp $\Omega_i \subset R^p$ là tập mở thì ta cũng ký hiệu $C^m(\Omega_i;R)$ là không gian vectơ các hàm $f:\Omega_i \to R$ sao cho tất cả các đạo hàm riêng của f đến cấp m đều thuộc $C(\Omega_i;R)$, nghĩa là

$$C^m(\Omega_i;R) = \left\{ f \in C(\Omega_i;R) : D^\alpha f \in C(\Omega_i;R), |\alpha| \le m \right\}$$

và $$C^m(\overline{\Omega}_i;R) = \left\{ f \in C^m(\Omega_i;R) : D^\alpha f \in C(\overline{\Omega}_i;R), |\alpha| \le m \right\}.$$

Mặt khác $C^m(\overline{\Omega}_i;R)$ cũng là không gian Banach với chuẩn

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega};R)} = \max_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \overline{\Omega}_i} \left| D^\alpha f(x) \right|.$$

Không gian tích Descartes $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ trang bị một chuẩn

$$\|f\|_X = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{X_i}, \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in X. \tag{2.4}$$

là một không gian Banach.

Ta viết hệ phương trình hàm (1.1) dưới dạng phương trình toán tử trong X như sau

(2.5) $$f = Tf,$$

trong đó $f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right)$, $Tf = \left((Tf)_1, (Tf)_2, \ldots, (Tf)_n\right)$.

với

(2.6) $$(Tf)_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\left(x, f_j(S_{ijk}(x))\right) + g_i(x)\,,\ x \in \Omega_i\,,\ i = \overline{1, n}.$$

Chương 3

SỰ TỒN TẠI, DUY NHẤT VÀ ỔN ĐỊNH LỜI GIẢI

Chúng ta thành lập các giả thiết sau

(H_1) $S_{ijk}: \Omega_i \to \Omega_j$ là các hàm liên tục,

(H_2) $g \in X$,

(H_3) $a_{ijk}: \Omega_i \times R \to R$ liên tục và thỏa điều kiện:

tồn tại $\tilde{\alpha}_{ijk}: \Omega_i \to R$ bị chặn và không âm sao cho

(3.1) $\left|a_{ijk}(x, y) - a_{ijk}(x, \tilde{y})\right| \le \tilde{\alpha}_{ijk}(x)|y - \tilde{y}|$, $\forall x \in \Omega_i$, $\forall y, \tilde{y} \in R$;

(3.2) $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega_i} \tilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1$;

(3.3) $a_{ijk}(.,0) \in X_i$. (điều kiện này bỏ qua nếu Ω_i là compact)

Khi đó ta có kết quả sau

<u>Định lý 3.1</u>

Dưới giả thiết $(H_1) - (H_3)$, *tồn tại duy nhất một hàm* $f \in X$ *sao cho* $f = Tf$. *Hơn nữa, lời giải* f *ổn định đối với* g *trong* X.

<u>Chứng minh</u>

Hiển nhiên ta có $Tf \in X$ với mọi $f \in X$.

Xét $f, \tilde{f} \in X$, ta có với mọi $i = \overline{1,n}$, $\forall x \in \Omega_i$

$$(3.4)\quad (Tf)_i(x) - \left(T\tilde{f}\right)_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\{a_{ijk}\left(x, f_j(S_{ijk}(x))\right) - a_{ijk}\left(x, \tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right)\right\}.$$

Sử dụng giả thiết $(H_1),(H_3)$ ta có

$$\left|(Tf)_i(x) - \left(T\tilde{f}\right)_i(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{\alpha}_{ijk}(x)\left|f_j(S_{ijk}(x)) - \tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{x\in\Omega_i}\tilde{\alpha}_{ijk}(x)\left\|f_j - \tilde{f}_j\right\|_{X_j}.$$

Lấy sup trên Ω_i rồi sau đó lấy tổng theo $i=\overline{1,n}$ ta được

$$(3.5)\qquad \left\|Tf - T\tilde{f}\right\|_X = \sum_{i=1}^{n}\left\|(Tf)_i - \left(T\tilde{f}\right)_i\right\|_{X_i}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{x\in\Omega_i}\tilde{\alpha}_{ijk}(x)\left\|f_j - \tilde{f}_j\right\|_{X_j}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\leq j\leq n}\sup_{x\in\Omega_i}\tilde{\alpha}_{ijk}(x)\left\|f - \tilde{f}\right\|_X$$

$$= \sigma\left\|f - \tilde{f}\right\|_X.$$

Theo định lý điểm bất động Banach, có duy nhất một $f \in X$ sao cho $f = Tf$.

Giả sử $f,\tilde{f} \in X$ là hai lời giải của hệ (1.1) lần lượt ứng với $g,\tilde{g} \in X$ ta có

với mọi $i=\overline{1,n}$, với mọi $x\in\Omega_i$

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} f_i(x) - \tilde{f}_i(x) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\{a_{ijk}\left(x, f_j(S_{ijk}(x))\right) - a_{ijk}\left(x, \tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right)\right\} \\ &\quad + \left(g_i(x) - \tilde{g}_i(x)\right) \end{aligned}$$

Lập lại quá trình trên ta có

$$\|f-\tilde{f}\|_X \leq \sigma\|f-\tilde{f}\|_X + \|g-\tilde{g}\|_X$$

hay

(3.7) $$\|f-\tilde{f}\|_X \leq \frac{1}{1-\sigma}\|g-\tilde{g}\|_X.$$

Vậy lời giải f ổn định đối với g trong X.

<u>Chú thích 3.1</u>

Trong định lý 3.1 , với $p=1$, $\Omega_i=\Omega$, $\forall i=\overline{1,n}$, là khoảng đóng bị chặn hay không bị chặn và điều kiện (3.2) được thay bởi

(3.8) $$\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{x\in\Omega}\tilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1,$$

chúng tôi tìm lại kết quả như trong [5]. Mặt khác, điều kiện (3.2) yếu hơn điều kiện (3.8) vì

(3.9) $$\sigma \leq \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sup_{x\in\Omega}\tilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1.$$

<u>Chú thích 3.2</u>

Định lý 3.1 cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp

(3.10) $$f^{(\nu)}=Tf^{(\nu-1)}\ ,\ \nu=1,2,...\ ,\ f^{(0)}\in X \text{ cho trước.}$$

Khi đó dãy $\{f^{(\nu)}\}$ hội tụ trong X về lời giải f của (2.5) và ta có một đánh giá sai số

(3.11) $$\|f-f^{(\nu)}\|_X \leq \frac{\|f^{(0)}-Tf^{(0)}\|_X}{1-\sigma}\sigma^{\nu}\ ,\ \forall\nu=1,2,...$$

Nếu ta giả sử rằng $\Omega_i \subset R^p$, $i = \overline{1,n}$ thỏa mãn điều kiện

(3.12) Tồn tại song ánh $\tau_i : \Omega \to \Omega_i$, $i = \overline{1,n}$ sao cho τ_i, τ_i^{-1} liên tục.

Khi đó hệ (1.1) tương đương với hệ sau

(3.13) $$\hat{f}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \hat{a}_{ijk}\left(t, \hat{f}_j(\hat{S}_{ijk}(t))\right) + \hat{g}_i(x), \forall i = \overline{1,n}, \ \forall t \in \Omega,$$

trong đó $\hat{f}_i = f_i \circ \tau_i$, $\hat{g}_i = g_i \circ \tau_i$

$$\hat{S}_{ijk} = \tau_j^{-1} \circ S_{ijk} \circ \tau_i$$

(3.14) $$\hat{a}_{ijk}(t,z) = a_{ijk}\left(\tau_i(t), z\right), \ t \in \Omega, z \in R.$$

Như vậy ta có thể giả sử rằng tất cả các ẩn hàm f_i của hệ (1.1) có cùng miền xác định, tức là $\Omega_i = \Omega$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Khi đó ta sử dụng không gian hàm X như sau:

_ Nếu Ω là tập compact, ta đặt $X = C\left(\Omega, R^n\right)$ là không gian Banach các hàm $f : \Omega \to R^n$ liên tục với chuẩn

(3.15) $$\|f\|_X = \sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|f_i(x)\right| , \ f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right) \in X.$$

_ Nếu Ω là tập không compact, ta đặt $X = C_b\left(\Omega, R^n\right)$ là không gian Banach các hàm $f : \Omega \to R^n$ liên tục bị chặn với chuẩn như (3.15).

Ta thành lập các giả thiết sau đây

(H_1') $S_{ijk} : \Omega \to \Omega$ liên tục,

(H_2') $g \in X$,

(H'_3) $a_{ijk}: \Omega \times R \to R$ liên tục và thỏa điều kiện:

tồn tại $\tilde{\alpha}_{ijk}: \Omega \to R$ bị chặn và không âm sao cho

(3.16) $\left|a_{ijk}(x, y) - a_{ijk}(x, \tilde{y})\right| \le \tilde{\alpha}_{ijk}(x)|y - \tilde{y}|$, $\forall x \in \Omega$, $\forall y, \tilde{y} \in R$;

(3.17) $$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega} \tilde{\alpha}_{ijk}(x) < 1;$$

(3.18) $a_{ijk}(.,0) \in X_i$ (điều kiện này bỏ qua nếu Ω là compact).

Khi đó ta có định lý

Định lý 3.2

Giả sử các giả thiết $(H'_1) - (H'_3)$ *đúng. Khi đó tồn tại duy nhất* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in X$ *là lời giải cho hệ phương trình hàm sau*

(3.19) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ijk}\left(x, f_j(S_{ijk}(x))\right) + g_i(x), \ \forall x \in \Omega, \forall i = \overline{1, n}.$$

Hơn nữa, lời giải f *của hệ* (3.19) *ổn định đối với* g *trong* X.

<u>Chứng minh</u>

Vẫn sử dụng các ký hiệu như (2.5), (2.6).

Hiển nhiên ta có $T: X \to X$.

Coi $f, \tilde{f} \in X$, tương tự như (3.4) ta có: với mọi $x \in \Omega$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|(Tf)_i(x) - (T\tilde{f})_i(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \tilde{\alpha}_{ijk}(x) \left|f_j(S_{ijk}(x)) - \tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \tilde{\alpha}_{ijk}(x) \sum_{j=1}^{n} \left|f_j(S_{ijk}(x)) - \tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\sup_{x\in\Omega}\tilde{\alpha}_{ijk}(x)\|f-\tilde{f}\|_X$$
$$= \sigma\|f-\tilde{f}\|_X$$

Do đó $\|Tf - T\tilde{f}\|_X \le \sigma\|f-\tilde{f}\|_X$.

Phần còn lại chứng minh tương tự.

Chú thích 3.3

Như nhận xét trong chú thích 3.1, kết quả trong [5] là trường hợp đặc biệt của định lý 3.2 với $p = 1$.

Trường hợp riêng sau đây chúng tôi xét hệ (3.19) với a_{ijk} như (1.2).

(3.20) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk}f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),\ \forall x\in\Omega, \forall i=\overline{1,n},$$

trong đó $S_{ijk}(x)$ là hàm *affine* nghĩa là

(3.21) $$S_{ijk}(x) = B^{ijk}x + c^{ijk}, \text{ với}$$

$$B^{ijk} = \begin{bmatrix} b_{11}^{ijk} & b_{12}^{ijk} & \dots & b_{1p}^{ijk} \\ b_{21}^{ijk} & b_{22}^{ijk} & \dots & b_{2p}^{ijk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1}^{ijk} & b_{p2}^{ijk} & \dots & b_{pp}^{ijk} \end{bmatrix},\quad c^{ijk} = \begin{bmatrix} c_1^{ijk} \\ c_2^{ijk} \\ \vdots \\ c_p^{ijk} \end{bmatrix}.$$

(3.22) $$\Omega = \overline{B}_r(0) = \left\{x\in R^p : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p}|x_i| \le r\right\}.$$

Ta xét không gian hàm $X = C(\Omega, R^n)$ và thành lập các giả thiết cho hệ (3.20) như sau

(H_2'') $g\in X$,

(H_3'') $\sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \left| \tilde{a}_{ijk} \right| < 1.$

Ta đưa thêm giảthiết cho B^{ijk} và c^{ijk} trong (3.21) để S_{ijk} thỏa (H_1').

Nhận xét rằng

(3.23) $$\left\| B^{ijk} x \right\|_1 \le \left\| B^{ijk} \right\|_1 \|x\|_1 , \quad \forall x \in R^p,$$

trong đó

(3.24) $$\left\| B^{ijk} \right\|_1 = \max_{1 \le \nu \le p} \sum_{\mu=1}^{p} \left| b_{\mu\nu}^{ijk} \right|.$$

Ta có

(3.25) $$\left\| S_{ijk}(x) \right\|_1 \le \left\| B^{ijk} \right\|_1 r + \left\| c^{ijk} \right\|_1 , \quad \forall x \in \Omega.$$

Từ đây ta giả sử ma trận B^{ijk} và vectơ c^{ijk} thỏa

(H_1'') (i) $\left\| B^{ijk} \right\|_1 < 1,$

(ii) $$\max_{\substack{1 \le i,j \le n \\ 1 \le k \le m}} \frac{\left\| c^{ijk} \right\|_1}{1 - \left\| B^{ijk} \right\|_1} \le r.$$

Vậy nếu B^{ijk}, c^{ijk} thỏa (H_1'') thì $S_{ijk}(x)$ trong (3.21) thỏa (H_1').

Khi đó ta có định lý

<u>Định lý 3.3</u>

Giả sử $(H_1'')-(H_3'')$ *đúng. Khi đó hệ* (3.20)–(3.22) *có duy nhất một lời giải* $f \in X$. *Hơn nữa, lời giải* f *ổn định đối với* g *trong* X.

<u>Chú thích 3.4</u>

Trường hợp $\Omega = R^p$, ta lấy $X = C_b\left(R^p, R^n\right)$ không gian Banach các hàm liên tục, bị chặn $f: R^p \to R^n$ đối với chuẩn

(3.26) $$\|f\|_X = \sup_{x \in R^p} \sum_{i=1}^{n} \left|f_i(x)\right|, \quad f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_n\right) \in X,$$

trong đó B^{ijk} và c^{ijk} không cần thỏa điều kiện $\left(H_1''\right)$.

Khi đó ta có kết quả sau

Định lý 3.4

Với $\Omega = R^p$, $X = C_b\left(R^p, R^n\right)$. *Giả sử* $\left(H_2''\right), \left(H_3''\right)$ *đúng. Khi đó tồn tại duy nhất* $f \in X$ *là lời giải của hệ* (3.20), (3.21). *Hơn nữa, lời giải* f *ổn định đối với* g *trong* X.

Chương 4

KHAI TRIỂN MACLAURIN CỦA LỜI GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM TUYẾN TÍNH

Ta xét trong chương này với hệ (3.20)–(3.22), trong đó $\tilde{a}_{ijk}$, B^{ijk}, c^{ijk} thỏa các giả thiết (H_1'') và (H_3'').

Giả sử $f \in C^1(\Omega; R^n)$ là lời giải của hệ (3.20)–(3.22) ứng với $g \in C^1(\Omega; R^n)$.

Đạo hàm hai vế của (3.20) theo biến x_μ, $1 \le \mu \le p$, ta thu được

$$D_\mu f_i(x) = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_\mu} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[f_j(S_{ijk}(x)\right] + D_\mu g_i(x). \tag{4.1}$$

Mặt khác, theo (3.21)

$$S_{ijk}(x) = \left(\left[S_{ijk}(x)\right]_1, \ldots, \left[S_{ijk}(x)\right]_p\right)^T$$

$$\left[S_{ijk}(x)\right]_\nu = \sum_{\eta=1}^{p} b_{\nu\eta}^{ijk} x_\eta + c_\nu^{ijk}, \ 1 \le \nu \le p, \tag{4.2}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[f_j(S_{ijk}(x))\right] &= \sum_{\nu=1}^{p} D_\nu f_j(S_{ijk}(x)) \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[S_{ijk}(x)\right]_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} D_\nu f_j(S_{ijk}(x)). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Vậy từ (4.1)–(4.3) ta có

$$(4.4)\quad D_\mu f_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk}\sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} D_\nu f_j(S_{ijk}(x)) + D_\mu g_i(x),$$

$$i = \overline{1,n},\ \mu = \overline{1,p},\ x \in \Omega$$

Ta đặt

$$(4.5)\qquad F_i^\mu = D_\mu f_i\ ,\ i = \overline{1,n}\ ,\ \mu = \overline{1,p}.$$

Ta xếp thứ tự F_i^μ như sau

$$(4.6)\qquad F = \left(F_1^1, \ldots, F_1^p, F_2^1, \ldots, F_2^p, \ldots, F_n^1, \ldots, F_n^p\right),$$

Khi đó $F \in (C(\Omega; R))^{np} \equiv X^{(1)}$ là lời giải của hệ phương trình hàm

$$(4.7)\qquad F_i^\mu(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk}\sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} F_j^\nu(S_{ijk}(x)) + D_\mu g_i(x),$$

$$i = \overline{1,n},\ \mu = \overline{1,p},\ x \in \Omega.$$

Ta viết hệ (4.7) dưới dạng phương trình toán tử trong $X^{(1)}$ như sau

$$(4.8)\qquad F = TF \text{ trong } X^{(1)},$$

trong đó

$$(4.9)\quad TF = \left((TF)_1^1, \ldots, (TF)_1^p, (TF)_2^1, \ldots, (TF)_2^p, \ldots, (TF)_n^1, \ldots, (TF)_n^p\right),$$

với

$$(4.10)\qquad (TF)_i^\mu(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk}\sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} F_j^\nu(S_{ijk}(x)) + D_\mu g_i(x),$$

$$i = \overline{1,n},\ \mu = \overline{1,p},\ x \in \Omega$$

Ta cũng chú ý rằng $X^{(1)}$ là không gian Banach đối với chuẩn

(4.11) $$\|F\|_{X^{(1)}} = \max_{1 \le \mu \le p} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x \in \Omega} \left| F_j^{\mu}(x) \right|,$$

với $F = \left(F_1^1, \ldots, F_1^p, F_2^1, \ldots, F_2^p, \ldots, F_n^1, \ldots, F_n^p\right) \in X^{(1)}$.

Ta sẽ chứng minh rằng $T : X^{(1)} \to X^{(1)}$ là ánh xạ co.

Xét $F, \tilde{F} \in X^{(1)}$, ta có

(4.12) $$(TF)_i^{\mu}(x) - \left(T\tilde{F}\right)_i^{\mu}(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \tilde{a}_{ijk} \sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} \left[F_j^{\nu}(S_{ijk}(x)) - \tilde{F}_j^{\nu}(S_{ijk}(x))\right].$$

Suy ra

(4.13) $$\left|(TF)_i^{\mu}(x) - \left(T\tilde{F}\right)_i^{\mu}(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\nu=1}^{p} \left|b_{\nu\mu}^{ijk}\right| \sup_{x \in \Omega} \left|F_j^{\nu}(x) - \tilde{F}_j^{\nu}(x)\right|.$$

Đặt

(4.14) $$\left\|F_j^{\nu} - \tilde{F}_j^{\nu}\right\|_{\infty} = \sup_{x \in \Omega} \left|F_j^{\nu}(x) - \tilde{F}_j^{\nu}(x)\right|.$$

Ta suy từ (4.13) rằng

(4.15) $$\begin{aligned} \left\|(TF)_i^{\mu} - \left(T\tilde{F}\right)_i^{\mu}\right\|_{\infty} &\le \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\nu=1}^{p} \left|b_{\nu\mu}^{ijk}\right| \left\|F_j^{\nu} - \tilde{F}_j^{\nu}\right\|_{\infty} \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\nu=1}^{p} \left|b_{\nu\mu}^{ijk}\right| \sum_{j=1}^{n} \left\|F_j^{\nu} - \tilde{F}_j^{\nu}\right\|_{\infty} \\ &\le \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \max_{1 \le \mu \le p} \sum_{\nu=1}^{p} \left|b_{\nu\mu}^{ijk}\right| \max_{1 \le \nu \le p} \sum_{j=1}^{n} \left\|F_j^{\nu} - \tilde{F}_j^{\nu}\right\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Đặt

(4.16) $$\left\|B^{ijk}\right\|_1 = \max_{1 \le \mu \le p} \sum_{\nu=1}^{p} \left|b_{\nu p}^{ijk}\right|.$$

Ta có từ (4.15) rằng

(4.17) $\sum_{l=1}^{n} \left\| (TF)_i^{\mu} - (T\tilde{F})_i^{\mu} \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} |\tilde{a}_{ijk}| \left\| B^{ijk} \right\|_1 \left\| F - \tilde{F} \right\|_{X^{(1)}}$.

Từ (4.17) lấy $\max_{1\leq \mu \leq p}$ ta được

(4.18) $\left\| TF - T\tilde{F} \right\|_{X^{(1)}} \leq \sigma^{(1)} \left\| F - \tilde{F} \right\|_{X^{(1)}}, \ \forall F, \tilde{F} \in X^{(1)}$,

với

(4.19) $\sigma^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} |\tilde{a}_{ijk}| \left\| B^{ijk} \right\|_1$.

Từ các giả thiết (H_1''), (H_3''), ta có từ (4.19) rằng

(4.20) $\sigma^{(1)} \leq \sigma < 1$.

Áp dụng định lý 2.1, tồn tại duy nhất $F \in X^{(1)}$ sao cho $TF = F$, tức là hệ phương trình hàm (4.7) có duy nhất lời giải $F \in X^{(1)}$.

Do tính duy nhất lời giải của hệ (4.7), từ (4.4) ta có

(4.21) $D_{\mu} f_i \equiv F_i^{\mu}, \ \forall i = \overline{1, n}, \ \forall \mu = \overline{1, p}$.

Khi đó ta có định lý sau

<u>Định lý 4.1</u>

Giả sử $\tilde{a}_{ijk}, B^{ijk}, c^{ijk}$ *thỏa mãn các giả thiết* (H_1''), (H_3'') và $g \in C^1(\Omega; R^n)$.

Khi đó tồn tại $f \in C^1(\Omega; R^n)$ *và* $F \in X^{(1)}$ *là các lời giải duy nhất của các hệ* (3.20)–(3.22) *và* (4.7), *lần lượt.*

Hơn nữa, ta còn có

(4.22) $F_i^{\mu} = D_{\mu} f_i, \ \forall i = \overline{1, n}, \ \forall \mu = \overline{1, p}$.

Tương tự, ta có thể xét với đạo hàm cấp cao của f_i là lời giải tương ứng với hệ phương trình hàm nào đó.

Trước tiên ta lưu ý một số công thức đạo hàm cấp cao như dưới đây.

Xét $\Phi \in C^1(\Omega; R)$, ta có tính toán tương tự như (4.3) với f_i thay bởi Φ như sau

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Phi\left(S_{ijk}(x)\right) = \sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} D_\nu \Phi\left(S_{ijk}(x)\right) \tag{4.23}$$

Bằng qui nạp ta có công thức đạo hàm cấp cao cho $\Phi \in C^q\left(\Omega; R^n\right)$

$$\frac{\partial^q}{\partial x_\mu^q}\Phi\left(S_{ijk}(x)\right) = \left(\sum_{\nu=1}^{p} b_{\nu\mu}^{ijk} D_\nu\right)^q \Phi\left(S_{ijk}(x)\right), \tag{4.24}$$

hay

$$\frac{\partial^q}{\partial x_\mu^q}\Phi\left(S_{ijk}(x)\right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=q} \frac{q\,!}{\alpha\,!}\left(b_{1\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_1}\left(b_{2\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(b_{p\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_p} D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}\ldots D_p^{\alpha_p}\Phi\left(S_{ijk}(x)\right)$$

trong đó $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\right)$ là p-đa chỉ số và

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p, \\ \alpha\,! &= \alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\ldots\alpha_p\,!\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Ta ký hiệu

$$\begin{aligned} D^\alpha &= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}\ldots D_p^{\alpha_p}, \\ \vec{b}_{\mu}^{ijk\,\alpha} &= \left(b_{1\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_1}\left(b_{2\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_2}\ldots\left(b_{p\mu}^{ijk}\right)^{\alpha_p} \end{aligned} \tag{4.26}$$

Ta viết lại (4.24) dưới dạng gọn hơn

(4.27) $$\frac{\partial^q}{\partial x_\mu^q}\Phi\big(S_{ijk}(x)\big) = \sum_{|\alpha|=q}\frac{q\,!}{\alpha\,!}\,\overrightarrow{b_\mu^{ijk}}^{\alpha}\,D^\alpha\Phi\big(S_{ijk}(x)\big).$$

Với $\Phi \in C^{q_1+q_2}(\Omega; R)$, $\mu \neq \nu$, ta có

(4.28) $$\frac{\partial^{q_1+q_2}}{\partial x_\mu^{q_1}\partial x_\nu^{q_2}}\Phi\big(S_{ijk}(x)\big) = \sum_{\substack{|\alpha|=q_1\\|\beta|=q_2}}\frac{q_1\,!\,q_2\,!}{\alpha\,!\,\beta\,!}\,\overrightarrow{b_\mu^{ijk}}^{\alpha}\,\overrightarrow{b_\nu^{ijk}}^{\beta}\,D^{\alpha+\beta}\Phi\big(S_{ijk}(x)\big).$$

Tổng quát với $\Phi \in C^{q_1+q_2+\cdots+q_p}(\Omega; R)$, ta có

$$\frac{\partial^{q_1+q_2+\cdots+q_p}}{\partial x_1^{q_1}\partial x_2^{q_2}\ldots\partial x_p^{q_p}}\Phi\big(S_{ijk}(x)\big) =$$

(4.29) $$\sum_{\substack{|\vec\alpha_1|=q_1\\|\vec\alpha_2|=q_2\\ \cdots\cdots\\|\vec\alpha_p|=q_p}}\frac{q_1!q_2!\ldots q_p!}{\vec\alpha_1!\vec\alpha_2!\ldots\vec\alpha_p!}\,\overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec\alpha_1}\,\overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec\alpha_2}\,..\overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec\alpha_p}\,D^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\Phi\big(S_{ijk}(x)\big)$$

Trong đó, ta cũng ký hiệu lại

$$\vec\alpha_s = \big(\alpha_{1s},\alpha_{2s},\ldots,\alpha_{ps}\big),$$

$$|\vec\alpha_s| = \alpha_{1s}+\alpha_{2s}+\cdots+\alpha_{ps},$$

(4.30) $$D^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\Phi = D_1^{\alpha_{11}+\alpha_{12}+\cdots+\alpha_{1p}}D_2^{\alpha_{21}+\alpha_{22}+\cdots+\alpha_{2p}}\ldots$$

$$\ldots D_p^{\alpha_{p1}+\alpha_{p2}+\cdots+\alpha_{pp}}\Phi,$$

$$\overrightarrow{b_s^{ijk}}^{\vec\alpha_s} = \big(b_{1s}^{ijk}\big)^{\alpha_{1s}}\big(b_{2s}^{ijk}\big)^{\alpha_{2s}}\ldots\big(b_{ps}^{ijk}\big)^{\alpha_{ps}}.$$

Bây giờ ta giả sử $q \geq 1$ là số tự nhiên cố định, xét p-đa chỉ số $\vec q = \big(q_1, q_2, \ldots, q_p\big)$ với

(4.31) $$|\vec q| = q_1 + q_2 + \cdots + q_p = q.$$

Giả sử $g \in C^q(\Omega; R^n)$ và $f \in C^q(\Omega; R^n)$ là lời giải của hệ phương trình hàm (3.20) tương ứng với g.

Từ công thức (4.29), đạo hàm theo các biến đến cấp q

(4.32) $$D^{\vec{q}} f_i(x) = D_1^{q_1} D_2^{q_2} \dots D_p^{q_p} f_i(x) = D^{\vec{q}} g_i(x) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk} \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\dots,p}} \frac{\vec{q}!}{\vec{\alpha}_1!\vec{\alpha}_2!\dots\vec{\alpha}_p!} \overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec{\alpha}_1} \overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec{\alpha}_2} \dots \overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec{\alpha}_p} D^{\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots+\vec{\alpha}_p} f_j\left(S_{ijk}(x)\right)$$

$\forall x \in \Omega$, $\forall i = \overline{1,n}$, $|\vec{q}| = q_1 + q_2 + \cdots + q_p = q$.

Với mỗi p-đa chỉ số $\vec{q} = \left(q_1, q_2, \dots, q_p\right)$ sao cho

$$|\vec{q}| = q_1 + q_2 + \cdots + q_p = q,$$

ta đặt

(4.33) $$F_i^{\vec{q}} \equiv F_i^{(q_1, q_2, \dots, q_p)} = D_1^{q_1} D_2^{q_2} \dots D_p^{q_p} f_i = D^{\vec{q}} f_i.$$

Khi đó $F_i^{\vec{q}}$, $|\vec{q}| = q$, $1 \le i \le n$ là nghiệm của hệ phương trình hàm sau đây

(4.34) $$F_i^{\vec{q}}(x) = D^{\vec{q}} g_i(x) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde{a}_{ijk} \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\dots,p}} \frac{\vec{q}!}{\vec{\alpha}_1!\vec{\alpha}_2!\dots\vec{\alpha}_p!} \overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec{\alpha}_1} \overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec{\alpha}_2} \dots \overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec{\alpha}_p} \times F_j^{\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\cdots+\vec{\alpha}_p}\left(S_{ijk}(x)\right),$$

$$\forall x \in \Omega,\ \forall i = \overline{1, n},\ \forall \vec{q}, |\vec{q}| = q.$$

Bây giờ ta khảo sát hệ phương trình hàm (4.34).

Trước hết, số phương trình xuất hiện trong hệ (4.34) là số ẩn hàm $F_i^{\vec{q}}$ xuất hiện trong hệ (4.34), tức là n lần số phần tử của tập các p-đa chỉ số sau:

(4.35) $$Q = \left\{\vec{q} = \left(q_1, q_2, \ldots, q_p\right) \in Z_+^p : |\vec{q}| = q_1 + q_2 + \cdots + q_p = q\right\}.$$

Bằng qui nạp, ta có thể tính toán được số phần tử của Q là

(4.36) $$N = \mathrm{Card}Q = C_{p+q-1}^{q} = \frac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,q!} = N(p,q).$$

Vậy ta viết

(4.37) $$Q = \left\{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \ldots, \vec{q}_N\right\}.$$

Các ẩn của hệ (4.34) được xếp thứ tự lại như sau

(4.38) $$F = \left(F_1^{\vec{q}_1}, F_1^{\vec{q}_2}, \ldots, F_1^{\vec{q}_N}, F_2^{\vec{q}_1}, F_2^{\vec{q}_2}, \ldots, F_2^{\vec{q}_N}, \ldots, F_n^{\vec{q}_1}, F_n^{\vec{q}_2}, \ldots, F_n^{\vec{q}_N}\right).$$

Ta chú ý rằng $X^{(q)} = (C(\Omega; R))^{nN}$ là không gian Banach đối với chuẩn

(4.39) $$\|F\|_{X^{(q)}} = \max_{|\vec{q}|=q} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} \left|F_i^{\vec{q}}(x)\right| = \max_{1\le\nu\le N} \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\Omega} \left|F_i^{\vec{q}_\nu}(x)\right|.$$

ở đây $F \in X^{(q)}$ được sắp thứ tự như (4.38).

Khi đó hệ phương trình hàm (4.34) được viết dưới dạng phương trình toán tử trong $X^{(q)}$ như sau

(4.40) $$F = \mathrm{T}F \quad \text{trong } X^{(q)}.$$

trong đó

$$(4.41)\qquad \begin{aligned}&(\mathrm{T}\ F)_i^{\vec q}(x) = D^{\vec q} g_i(x) + \\ &+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\tilde a_{ijk}\sum_{\substack{|\vec\alpha_s|=q_s\\ s=1,2,\ldots,p}}\frac{\vec q\,!}{\vec\alpha_1!\vec\alpha_2!\ldots\vec\alpha_p!}\,\overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec\alpha_1}\,\overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec\alpha_2}\ldots\overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec\alpha_p}\times \\ &\times F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\left(S_{ijk}(x)\right)\end{aligned}$$

$$\forall x\in\Omega,\ \forall i=\overline{1,n},\ \forall\vec q, |\vec q| = q.$$

Bây giờ ta sẽ nghiệm lại rằng

$\mathrm{T}: X^{(q)}\to X^{(q)}$ là một ánh xạ co .

Xét $F, \tilde F\in X^{(q)}, |\vec q| = q, \forall x\in\Omega,\ \forall i=\overline{1,n}$, ta có

(4.42)

$$\begin{aligned}&\left|(\mathrm{T}\ F)_i^{\vec q}(x) - (\mathrm{T}\ \tilde F)_i^{\vec q}(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|\tilde a_{ijk}|\sum_{\substack{|\vec\alpha_s|=q_s\\ s=1,2,\ldots,p}}\frac{\vec q\,!}{\vec\alpha_1!\vec\alpha_2!\ldots\vec\alpha_p!}\times \\ &\left|\overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec\alpha_1}\,\overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec\alpha_2}\ldots\overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec\alpha_p}\right|\times\left|F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\left(S_{ijk}(x)\right) - \tilde F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\left(S_{ijk}(x)\right)\right| \\ &\le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}|\tilde a_{ijk}|\sum_{\substack{|\vec\alpha_s|=q_s\\ s=1,2,\ldots,p}}\frac{\vec q\,!}{\vec\alpha_1!\vec\alpha_2!\ldots\vec\alpha_p!}\times \\ &\left|\overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec\alpha_1}\,\overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec\alpha_2}\ldots\overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec\alpha_p}\right|\times\left\|F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p} - \tilde F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\right\|_\infty \\ &\le \sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|\tilde a_{ijk}|\sum_{\substack{|\vec\alpha_s|=q_s\\ s=1,2,\ldots,p}}\frac{\vec q\,!}{\vec\alpha_1!\vec\alpha_2!\ldots\vec\alpha_p!}\times\left|\overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec\alpha_1}\,\overrightarrow{b_2^{ijk}}^{\vec\alpha_2}\ldots\overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec\alpha_p}\right|\times \\ &\sum_{j=1}^{n}\left\|F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p} - \tilde F_j^{\vec\alpha_1+\vec\alpha_2+\cdots+\vec\alpha_p}\right\|_\infty\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\ldots,p}} \frac{\vec{q}\,!}{\vec{\alpha}_1!\,\vec{\alpha}_2!\ldots\vec{\alpha}_p!} \times \left| \vec{b}_1^{\,ijk\,\vec{\alpha}_1}\, \vec{b}_2^{\,ijk\,\vec{\alpha}_2} \ldots \vec{b}_p^{\,ijk\,\vec{\alpha}_p} \right| \times$$

$$\max_{|\vec{q}|=q} \sum_{j=1}^{n} \left\| F_j^{\vec{q}} - \tilde{F}_j^{\vec{q}} \right\|_\infty$$

Suy ra từ (4.42) bằng cách lấy sup trên Ω và sau đó lấy tổng theo i.

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| (TF)_i^{\vec{q}} - (T\tilde{F})_i^{\vec{q}} \right\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\ldots,p}} \frac{\vec{q}\,!}{\vec{\alpha}_1!\,\vec{\alpha}_2!\ldots\vec{\alpha}_p!} \times \tag{4.43}$$

$$\left| \vec{b}_1^{\,ijk\,\vec{\alpha}_1}\, \vec{b}_2^{\,ijk\,\vec{\alpha}_2} \ldots \vec{b}_p^{\,ijk\,\vec{\alpha}_p} \right| \left\| F - \tilde{F} \right\|_{X^{(q)}}$$

Lấy sup theo $\vec{q}, |\vec{q}| = q$ của vế trái (4.43), ta có

$$\left\| TF - T\tilde{F} \right\|_{X^{(q)}} \leq \sigma_q \left\| F - \tilde{F} \right\|_{X^{(q)}}, \tag{4.44}$$

trong đó

$$\sigma_q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \left|\tilde{a}_{ijk}\right| \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\ldots,p}} \frac{\vec{q}\,!}{\vec{\alpha}_1!\,\vec{\alpha}_2!\ldots\vec{\alpha}_p!} \times \left| \vec{b}_1^{\,ijk\,\vec{\alpha}_1}\, \vec{b}_2^{\,ijk\,\vec{\alpha}_2} \ldots \vec{b}_p^{\,ijk\,\vec{\alpha}_p} \right|. \tag{4.45}$$

Với mỗi $s = 1,2,\ldots.p$ ta có

$$\sum_{|\vec{\alpha}_s|=q_s} \frac{q_s!}{\vec{\alpha}_s!} \left| \vec{b}_s^{\,ijk\,\vec{\alpha}_s} \right| = \sum_{\substack{\vec{\alpha}_s=(\alpha_{1s},\ldots,\alpha_{ps}) \\ |\vec{\alpha}_s|=q_s}} \frac{q_s!}{\alpha_{1s}!\,\alpha_{2s}!\ldots\alpha_{ps}!} \times \left| \left(b_{1s}^{ijk}\right)^{\alpha_{1s}} \ldots \left(b_{ps}^{ijk}\right)^{\alpha_{ps}} \right| \tag{4.46}$$

$$= \left(\left|b_{1s}^{ijk}\right| + \left|b_{2s}^{ijk}\right| + \cdots + \left|b_{ps}^{ijk}\right| \right)^{q_s} = \left(\sum_{\mu=1}^{p} \left|b_{\mu s}^{ijk}\right| \right)^{q_s}$$

$$\leq \left(\max_{1\leq s\leq p} \sum_{\mu=1}^{p} \left|b_{\mu s}^{ijk}\right| \right)^{q_s} = \left\| B^{ijk} \right\|_1^{q_s}$$

Từ (4.46) ta có

$$\text{(4.47)} \qquad \sum_{\substack{|\vec{\alpha}_s|=q_s \\ s=1,2,\ldots,p}} \frac{\vec{q}!}{\vec{\alpha}_1!\vec{\alpha}_2!\ldots\vec{\alpha}_p!} \times \left| \overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec{\alpha}_1} \ldots \overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec{\alpha}_p} \right| =$$

$$= \sum_{|\vec{\alpha}_1|=q_1} \frac{q_1!}{\vec{\alpha}_1!} \left| \overrightarrow{b_1^{ijk}}^{\vec{\alpha}_1} \right| \cdots \sum_{|\vec{\alpha}_p|=q_p} \frac{q_p!}{\vec{\alpha}_p!} \left| \overrightarrow{b_p^{ijk}}^{\vec{\alpha}_p} \right|$$

$$\le \left\| B^{ijk} \right\|_1^{q_1+q_2+\cdots+q_p} = \left\| B^{ijk} \right\|_1^{q}.$$

Từ (4.45), (4.47) ta có

$$\text{(4.48)} \qquad \sigma_q \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \left| \tilde{a}_{ijk} \right| \left\| B^{ijk} \right\|_1^{q} \equiv \sigma^{(q)}$$

Vậy ta viết lại (4.44)

$$\text{(4.49)} \qquad \left\| TF - T\tilde{F} \right\|_{X^{(q)}} \le \sigma^{(q)} \left\| F - \tilde{F} \right\|_{X^{(q)}}, \forall F, \tilde{F} \in X^{(q)}.$$

Với giả thiết (H_1''), (H_3''), ta suy từ (4.48) rằng

$$\text{(4.50)} \qquad \sigma^{(q)} < \sigma < 1.$$

Vậy áp dụng định lý 2.1, tồn tại duy nhất $F \in X^{(q)}$ sao cho $F = TF$, tức là hệ phương trình hàm (4.34) có duy nhất lời giải $F \in X^{(q)}$.

Từ sự duy nhất lời giải của hệ (4.34), kết hợp (4.32) ta có

$$\text{(4.51)} \qquad F_i^{\vec{q}} = D^{\vec{q}} f_i\,, \ \forall i = \overline{1,n}\,, \ \forall \vec{q}\,, \ |\vec{q}| = q\,.$$

Khi đó ta có định lý sau

Định lý 4.2

Giả sử $\tilde{a}_{ijk}$, B^{ijk}, c^{ijk} *thỏa mãn các giả thiết* (H_1''), (H_3''). *Giả sử* $g \in C^q(\Omega; R^n)$. *Khi đó tồn tại* $f \in C^q(\Omega; R^n)$ *và* $F \in X^{(q)}$ *là các lời giải duy nhất của hệ* (3.20)–(3.22) *và* (4.34)*, lần lượt . Hơn nữa, ta cũng có*

(4.52) $$D^{\vec{q}} f_i = F_i^{\vec{q}}\ ,\ \forall i = \overline{1, n}\ ,\ \forall \vec{q}\ ,\ |\vec{q}| = q\,.$$

Chú thích 4.1

Trong trường hợp $\Omega = R^p$, ta giả sử rằng $\tilde{a}_{ijk}$, B^{ijk} thỏa điều kiện

(4.53) $$\max_{0 \le s \le q} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} |\tilde{a}_{ijk}| \left\| B^{ijk} \right\|_1^s < 1\,,$$

khi đó, nếu

(4.54) $$g \in C_b^q(\Omega; R^n) = \left\{ g \in C_b(\Omega; R^n) : D^\alpha g_i \in C_b(\Omega; R), 1 \le i \le n, |\alpha| \le q \right\},$$

thì kết luận của định lý 4.2 vẫn đúng, trong đó các không gian hàm $C^q(\Omega; R^n)$ và $X^{(q)}$ xuất hiện trong định lý lần lượt được thay bởi $C_b^q(\Omega; R^n)$ và $(C_b(\Omega; R))^{nN}$, với

$$N = \frac{(p + q - 1)\,!}{(p - 1)\,!\, q\,!}.$$

Kết quả này được chứng minh giống như chứng minh định lý 4.2.

Tiếp theo, ta xem xét khai triển Maclaurin của lời giải của hê phương trình hàm (3.20)–(3.22).

Giả sử $f \in C^q(\Omega; R^n)$ là lời giải của hệ (3.20)–(3.22) ứng với $g \in C^q(\Omega; R^n)$.

Khai triển Maclaurin của f_i đến cấp q ta được

$$(4.55)\quad f_i(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\frac{1}{k!}\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}D^{\alpha}f_i(0)x^{\alpha}+\int_0^1\frac{(1-t)^{q-1}}{(q-1)!}\sum_{|\alpha|=q}\frac{q!}{\alpha!}D^{\alpha}f_i(tx)x^{\alpha}dt$$

hay

$$(4.56)\quad f_i(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f_i(0)x^{\alpha}+\int_0^1 q(1-t)^{q-1}\sum_{|\alpha|=q}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f_i(tx)x^{\alpha}dt.$$

Mặt khác ta có

$$(4.57)\qquad 1\le i\le n,\quad F_i^{\vec q}=\begin{cases} f_i\ , & \text{nế u } |\vec q|=0\,,\\ D^{\vec q}f_i(x)\ , & \text{nế u } 1\le|\vec q|\le q\,.\end{cases}$$

Ta viết lại (4.56) nhờ (4.57) như sau

$$(4.58)\quad f_i(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{|\vec q|=k}\frac{1}{\vec q\,!}F_i^{\vec q}(0)x^{\vec q}+q\int_0^1(1-t)^{q-1}\sum_{|\vec q|=q}\frac{1}{\vec q\,!}F_i^{\vec q}(tx)x^{\vec q}dt.$$

Vậy nếu $g\in C^q(\Omega;R^n)$ thì lời giải f của hệ (3.20)–(3.22) được biểu diễn ở dạng (4.58) với $F_i^{\vec q}$ được xác định bởi hệ (4.34).

Đảo lại, giả sử $\tilde f\in C^q(\Omega;R^n)$ được biểu diễn dưới dạng

$$(4.59)\quad \tilde f_i(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{|\vec q|=k}\frac{1}{\vec q\,!}F_i^{\vec q}(0)x^{\vec q}+q\int_0^1(1-t)^{q-1}\sum_{|\vec q|=q}\frac{1}{\vec q\,!}F_i^{\vec q}(tx)x^{\vec q}dt,$$

với $F_i^{\vec q}$ được xác định bởi hệ (4.34), khi đó nhờ, (4.57) ta viết lại (4.59) như sau

$$(4.60)\quad \tilde f_i(x)=\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{|\vec q|=k}\frac{1}{\vec q\,!}D^{\vec q}f_i(0)x^{\vec q}+q\int_0^1(1-t)^{q-1}\sum_{|\vec q|=q}\frac{1}{q\,!}D^{\vec q}f_i(tx)x^{\vec q}dt$$

$$=f_i(x).\ (\text{do } (4.56))$$

Do đó $\tilde{f}$ là lời giải là lời giải của hệ (3.20)−(3.22) và ta có định lý sau

Định lý 4.3

Với cùng giả thiết định lý 4.2, lời giải f *của hệ* (3.20)−(3.22) *được biểu diễn dưới dạng* (4.58)*, với* $F_i^{\vec{q}}$ *được xác định bởi hệ phương trình hàm* (4.34).

Đảo lại, nếu $\tilde{f} \in C^q(\Omega; R^n)$ *được biểu diễn dưới dạng* (4.59) *với* $F_i^{\vec{q}}$ *được xác định bởi* (4.34) *thì* $\tilde{f}$ *là lời giải của hệ* (3.20)−(3.22).

Chú thích 4.2

Trong trường hợp $\Omega = R^p$ và $\tilde{a}_{ijk}$, B^{ijk} thỏa diều kiện (4.53), nếu $g \in C_b^q(\Omega; R^n)$ thì kết luận của định lý 4.3 vẫn đúng, trong dó các không gian hàm $C(\Omega; R^n)$, $C^q(\Omega; R^n)$ và $X^{(q)}$ xuất hiện trong định lý 4.3 lần lượt được thay bởi $C_b(\Omega; R^n)$, $C_b^q(\Omega; R^n)$ và $(C_b(\Omega; R))^{nN}$.

Ta trở lại với trường hợp $\Omega = \{x \in R^p : \|x\|_1 \le r\}$. Ta có kết quả sau

Định lý 4.4

Nếu $g_1, g_2, \dots, g_n$ *là các đa thức có bậc không vượt quá* q-1*, khi đó lời giải* f *của hệ* (3.20)−(3.22) *cũng là đa thức như vậy.*

Chứng minh

Giả sử

(4.61) $$g_i(x) = \sum_{|\alpha| \le q-1} C_i^\alpha x^\alpha .$$

Ta có

(4.62) $$D^{\alpha} g_i(x) = 0\,,\quad x \in \Omega\,,\ i = \overline{1,n}\,,\ |\alpha| \geq q\,,$$

Khi đó $F_i^{\vec{q}} \equiv 0\,,\ x \in \Omega\,,\ i = \overline{1,n}\,,\ |\vec{q}| = q$ là lời giải duy nhất của hệ (4.34). Áp dụng (4.58), ta có lời giải f_i của hệ (3.20)–(3.22) cho bởi

(4.63) $$f_i(x) = \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{|\vec{q}|=k} \frac{1}{\vec{q}\,!} F_i^{\vec{q}}(0) x^{\vec{q}}$$

$$= \sum_{|\vec{q}| \leq q-1} \frac{1}{\vec{q}\,!} F_i^{\vec{q}}(0) x^{\vec{q}}\,.$$

Định lý được chứng minh hoàn tất.

<u>Định lý 4.5</u>

Với cùng giả thiết của định lý 4.2, giả sử $f \in C^q\left(\Omega; R^n\right)$ *là lời giải của hệ* (3.20)–(3.22) *tương ứng với* $g \in C^q\left(\Omega; R^n\right)$ *và giả sử rằng* $\tilde{f}$ *là lời giải đa thức bậc không vượt quá* q-1 *của hệ* (3.20)–(3.22) *tương ứng với* $\tilde{g} = \left(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \ldots, \tilde{g}_n\right)$ *trong đó*

(4.64) $$\tilde{g}_i(x) = \sum_{|\vec{q}| \leq q-1} \frac{1}{\vec{q}\,!} D^{\vec{q}} g_i(0) x^{\vec{q}}\,,$$

Khi đó ta có

(4.65) $$\|f - \tilde{f}\|_X \leq \frac{1}{1-\sigma} \sum_{|\vec{q}|=q} \frac{r^q}{\vec{q}\,!} \left\|D^{\vec{q}} g\right\|_X\,.$$

<u>Chứng minh</u>

Khai tiển Maclaurin của g_i đến cấp q ta có

$$(4.66)\qquad g_i(x) = \tilde{g}_i(x) + \frac{1}{(q-1)!}\int_0^1 (1-t)^{q-1}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{q!}{\vec{q}!}D^{\vec{q}}g_i(tx)x^{\vec{q}}dt,$$

Áp dụng công thức đánh giá (3.7) ta được

$$(4.67)\qquad \|f-\tilde{f}\|_X \le \frac{1}{1-\sigma}\|g-\tilde{g}\|_X,$$

trong đó

$$(4.68)\qquad \|g-\tilde{g}\|_X = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|g_i(x)-\tilde{g}_i(x)\right|.$$

Trước hết ta đánh giá số hạng

$$(4.69)\ \left|g_i(x)-\tilde{g}_i(x)\right| = q\left|\int_0^1 (1-t)^{q-1}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{1}{\vec{q}!}D^{\vec{q}}g_i(tx)x^{\vec{q}}dt\right|$$

$$\le q\int_0^1 (1-t)^{q-1}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{1}{\vec{q}!}\left|D^{\vec{q}}g_i(tx)\right|\left|x^{\vec{q}}\right|dt.$$

Suy ra

$$(4.70)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left|g_i(x)-\tilde{g}_i(x)\right| \le q\int_0^1 (1-t)^{q-1}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{\left|x^{\vec{q}}\right|}{\vec{q}!}\sum_{i=1}^{n}\left|D^{\vec{q}}g_i(tx)\right|dt,$$

ta lại có

$$(4.71)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left|D^{\vec{q}}g_i(tx)\right| \le \sup_{y\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|D^{\vec{q}}g_i(y)\right| = \left\|D^{\vec{q}}g\right\|_X,\quad \forall t\in[0,1].$$

$$(4.72)\qquad \left|x^{\vec{q}}\right| = \left|x_1^{q_1}x_2^{q_2}\dots x_p^{q_p}\right| \le \|x\|_1^{q_1+q_2+\dots+q_p} = \|x\|_1^{q},$$

$$\forall\vec{q},\ |\vec{q}| = q,\ \forall x\in R^p.$$

Vậy từ (4.70)–(4.72) ta thu được

(4.73) $$\sum_{i=1}^{n}\left|g_i(x)-\tilde{g}_i(x)\right| \le q\int_0^1 (1-t)^{q-1}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{\|x\|_1^q}{\vec{q}!}\left\|D^{\vec{q}}g\right\|_X dt$$

$$= \sum_{|\vec{q}|=q}\frac{\|x\|_1^q}{\vec{q}\,!}\left\|D^{\vec{q}}g\right\|_X .$$

Từ (4.68) và (4.73) ta được

(4.74) $$\|g-\tilde{g}\|_X \le \sum_{|\vec{q}|=q}\frac{r^q}{\vec{q}\,!}\left\|D^{\vec{q}}g\right\|_X .$$

Vậy từ (4.67) và (4.74) ta có (4.65).

Định lý 4.5 được chứng minh hoàn tất.

<u>Định lý 4.6</u>

Với cùng giả thiết của định lý 4.2, giả sử $g \in C^{\infty}\left(\Omega; R^n\right)$ *sao cho tồn tại số thực* $d>0$ *sao cho*

(4.75) $$\left\|D^{\vec{q}}g\right\|_X \le d^{|\vec{q}|}\ ,\quad \forall \vec{q} \in Z_+^p .$$

Giả sử rằng f *là lời giải của hệ* (3.20)−(3.22) *tương ứng với* g *và* $\tilde{f}^{[q]} = \left(\tilde{f}_1^{[q]}, \tilde{f}_2^{[q]}, \ldots, \tilde{f}_p^{[q]}\right)$ *là lời giải đa thức có bậc không vượt quá* q-1 *của hệ (*3.20)−(3.22) *tương ứng với* $\tilde{g}$ *như* (4.64)*, khi đó ta có*

(4.76) $$\lim_{q\to\infty}\left\|f-\tilde{f}^{[q]}\right\|_X = 0 .$$

Hơn nữa ta có đánh giá

(4.77) $$\left\|f-\tilde{f}^{[q]}\right\|_X \le \frac{1}{1-\sigma}\frac{(prd)^q}{q\,!} .$$

<u>Chứng minh</u>

Dễ dàng suy từ (4.65) và (4.75) ta được

(4.78) $$\left\|f - \tilde{f}^{[q]}\right\|_X \le \frac{1}{1-\sigma}\sum_{|\vec{q}|=q}\frac{(rd)^q}{\vec{q}\,!}$$

$$= \frac{(rd)^q}{1-\sigma}\sum_{|\alpha|=q}\frac{1}{\alpha\,!}.$$

Ta sử dụng hằng đẳng thức

(4.79) $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^q = \sum_{|\alpha|=q}\frac{q\,!}{\alpha\,!}x^\alpha \ , \ \ \forall x \in R^p \ , \ \forall q \in Z_+,$$

với $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 1$ ta có

$$p^q = \sum_{|\alpha|=q}\frac{q\,!}{\alpha\,!} \text{ hay}$$

(4.80) $$\sum_{|\alpha|=q}\frac{1}{\alpha\,!} = \frac{p^q}{q\,!}.$$

Do đó, đánh giá (4.77) suy từ (4.78) và (4.80) và hiển nhiên (4.76) suy từ (4.77).

Định lý 4.6 được chứng minh hoàn tất.

<u>Định lý 4.7</u>

Với cùng giả thiết của định lý 4.2, giả sử $g \in C\left(\Omega; R^n\right)$ *và* f *là lời giải của hệ* (3.20)–(3.22) *tương ứng với* g.*Khi đó tồn tại dãy các đa thức có bậc không vượt quá* q-1.

(4.81) $$\tilde{f}^{[q]} = \left(\tilde{f}_1^{[q]}, \tilde{f}_2^{[q]}, \ldots, \tilde{f}_p^{[q]}\right),$$

sao cho

(4.82) $$\lim_{q\to\infty}\left\|f - \tilde{f}^{[q]}\right\|_X = 0.$$

<u>Chứng minh</u>

Do định lý Weierstrass, mỗi hàm g_i được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều $p_i^{[q]}$ khi bậc của nó là q-1 tiến ra ∞. Khi đó

$$(4.83) \qquad p^{[q]} = \left(p_1^{[q]}, p_2^{[q]}, \ldots, p_p^{[q]}\right) \to g \text{ trong } C\left(\Omega; R^n\right) \text{ khi } q \to \infty.$$

Gọi $\tilde{f}^{[q]}$ là lời giải đa thức của hệ (3.20)–(3.22) tương ứng với $g = p^{[q]}$. Nhờ đánh giá (4.67) với $\tilde{g} = p^{[q]}$, ta có

$$(4.84) \qquad \left\|\tilde{f}^{[q]} - f\right\|_X \le \frac{1}{1-\sigma}\left\|p^{[q]} - g\right\|_X \to 0, \text{ khi } q \to \infty.$$

<u>Chú thích 4.3</u>

Các kết quả trong các định lý 4.1– 4.7 đã tổng quát các kết quả trong bài báo [5] mà với p = 1 như là một trường hợp riêng.

Chương 5

THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI VÀ ÁP DỤNG

5.1 Thuật giải lặp cấp 2

Trong chương 3, định lý 3.1 đã cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp (3.10), theo nguyên tắc ánh xạ co, là một thuật giải hội tụ cấp 1. Trong chương này chúng ta trở lại hệ (1.1) để nghiên cứu một thuật giải có cấp độ hội tụ cao hơn. Ta giả sử các hàm $a_{ijk}(x, y)$ khả vi liên tục đến cấp cần thiết và chúng ta sẽ làm chính xác các giả thiết sau đó.

Ta xét giải thuật sau đây cho hệ (1.1)

_ Cho trước $f^{(0)} = \left(f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots, f_n^{(0)}\right) \in X$.

_ Giả sử biết $f^{(\nu-1)} = \left(f_1^{(\nu-1)}, f_2^{(\nu-1)}, \ldots, f_n^{(\nu-1)}\right) \in X$, ta xác định

$f^{(\nu)} = \left(f_1^{(\nu)}, f_2^{(\nu)}, \ldots, f_n^{(\nu)}\right) \in X$ bởi

(5.1)
$$f_i^{\nu}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\{a_{ijk}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right] + \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right] \times \right.$$
$$\left. \times \left[f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) - f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right]\right\} + g_i(x)$$
$$x \in \Omega_i,\ 1 \le i \le n,\ \nu = 1,2,\ldots$$

Ta viết lại dưới dạng

(5.2)
$$f_i^{\nu}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) + g_i^{(\nu)}(x),$$
$$x \in \Omega_i,\ 1 \le i \le n,\ \nu = 1,2,\ldots$$

trong đó

$$(5.3) \quad \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) = \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\left[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right],$$

$$(5.4) \quad g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left\{a_{ijk}[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))] - \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\right\},$$

$$x \in \Omega_i, \; 1 \le i, j \le n, \; 1 \le k \le m.$$

Ta thành lập các giả thiết sau

(H_1'') $S_{ijk} : \Omega_i \to \Omega_j$ là các hàm liên tục,

(H_2'') $g \in X$.

Khi đó ta có định lý sau

<u>Định lý 5.1</u>

Giả sử $(H_1''), (H_2'')$ *đúng. Giả sử* $a_{ijk}, \dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial y} : \Omega_i \times R \to R$ *liên tục và thỏa các điều kiện*

$$(5.5) \qquad a_{ijk}, \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y} \in C_b(\Omega_i \times [-M, M]; R), \forall M > 0.$$

(điều kiện (5.5) bỏ qua nếu Ω_i là compact)

Giả sử $f^{(\nu-1)} \in X$ *thỏa*

$$(5.6) \qquad \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \sup_{x \in \Omega_i} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| < 1.$$

Khi đó tồn tại duy nhất $f^{(\nu)} \in X$ *là lời giải của* (5.2)–(5.4).

<u>Chứng minh</u>

Ta áp dụng định lý 3.1 dễ dàng với

$$a_{ijk}(x, y) = \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x).\, y\,,\ \ g_i(x) = g_i^{(\nu)}(x) \text{ và } \tilde{\alpha}_{ijk} = \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}\right|.$$

Với mỗi $M > 0$ ta đặt

(5.7)
$$\begin{aligned}
A_{ijk}^{(0)}(M) &= \sup_{x \in \Omega_i, |y| \le M} \left|a_{ijk}(x, y)\right|,\\
A_{ijk}^{(1)}(M) &= \sup_{x \in \Omega_i, |y| \le M} \left|\frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}(x, y)\right|,\\
\sigma_M &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} A_{ijk}^{(1)}(M),\\
A_{ijk}^{(2)}(M) &= \sup_{x \in \Omega_i, |y| \le M} \left|\frac{\partial^2 a_{ijk}(x, y)}{\partial y^2}\right|.
\end{aligned}$$

Khi đó ta có định lý sau

<u>Định lý 5.2</u>

Giả sử $(H_1''), (H_2''')$ *đúng, giả sử* $a_{ijk}, \dfrac{\partial a_{ijk}}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2} : \Omega_i \times R \to R$ *liên tục và thỏa các điều kiện*

(5.8) $$a_{ijk}, \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}, \frac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2} \in C_b\left(\Omega_i \times [-M, M]; R\right), \forall M > 0.$$

(điều kiện (5.8) bỏ qua nếu Ω_i là compact).

(5,9) *Tồn tại hằng số dương* $M > 0$ *sao cho*

$$\|g\|_X + \sum_{i, j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(0)}(M) + 2M\sigma_M \le M.$$

Khi đó

(i) Thuật giải (5.1) *là cấp 2. Chính xác hơn, nếu* $\left\|f^{(0)}\right\|_X \leq M$ *thì*

(5.10) $$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \leq \Gamma_M \left\|f^{(\nu-1)} - f\right\|_X^2, \quad \forall \nu = 1,2,\ldots$$

trong đó

(5.11) $$\sigma_M = \frac{1}{2(1-\sigma_M)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \leq j \leq n} A_{ijk}^{(2)}(M),$$

và f *là lời giải của hệ* (1.1).

(ii) Nếu $f^{(0)}$ *được chọn đủ gần* f *sao cho*

(5.12) $$\Gamma_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X < 1,$$

thì thuật giải (5.1) *hội tụ đến cấp 2 và thỏa một đánh giá sai số*

(5.13) $$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \leq \frac{1}{\Gamma_M} \left(\Gamma_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X\right)^{2^\nu}, \quad \forall \nu = 1,2,\ldots$$

<u>Chứng minh</u>

Trước hết dãy $\left\{f^{(\nu)}\right\}$ được xác định từ định lý 5.1.

Ta sẽ nghiệm lại rằng nếu $\left\|f^{(0)}\right\|_X \leq M$ thì

(5.14) $$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \leq M, \quad \forall \nu = 1,2,\ldots$$

Giả thiết qui nạp

(5.15) $$\left\|f^{(\nu-1)}\right\|_X \leq M,$$

Ta có từ (5.2) và (5.15) rằng

(5.16) $$f_i^{(\nu)}(x) \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right|\left|f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x))\right| + \left|g_i^{(\nu)}(x)\right|$$

$$\le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(1)}(M)\left\|f_j^{(\nu)}\right\|_{X_j} + \left\|g_i^{(\nu)}\right\|_{X_i}$$

$$\le \sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(1)}(M)\sum_{j=1}^{n}\left\|f_j^{(\nu)}\right\|_{X_j} + \left\|g_i^{(\nu)}\right\|_{X_i}$$

Lấy sup trên Ω_i rồi lấy tổng theo I ta có

(5.17) $$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X = \sum_{i=1}^{n}\left\|f_i^{(\nu)}\right\|_{X_i} \le \sigma_M\left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X.$$

Chú ý rằng từ (5.9) ta suy ra $0 < \sigma_M \le \frac{1}{2}$, do đó từ (5.17) ta thu được

(5.18) $$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le \frac{1}{1-\sigma_M}\left\|g^{(\nu)}\right\|_X.$$

Ta đánh giá $\left\|g^{(\nu)}(x)\right\|_X$

Từ (5.4) ta có

(5.19) $$\left|g_i^{(\nu)}(x)\right| \le \left\|g_i(x)\right\|_{X_i} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(0)}(M) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(1)}(M)\left\|f_j^{(\nu-1)}\right\|_{X_j}.$$

Lấy sup trên Ω_i và sau đó lấy tổng theo I ta được

(5.20) $$\left\|g^{(\nu)}\right\|_X \le \|g\|_X + \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(0)}(M) + \sigma_M M.$$

Từ các đánh giá (5.18), (5.20) và sử dụng giả thiết (5.9) ta thu được (5.14).

Bây giờ ta đánh giá $e_i^{(\nu)} = f_i - f_i^{(\nu)}$.

Từ hệ (1.1) và (5.1), lấy hiệu ta được

$$
\begin{aligned}
e_i^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Big\{ & a_{ijk}\big[x, f_j\,(S_{ijk}(x))\big] - a_{ijk}\big[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\big] \\
& - \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\big[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\big]\big[f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) - f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Khai triển Taylor hàm $a_{ijk}\big[x, f_j\big]$ xung quanh điểm $\left(x, f_j^{(\nu-1)}\right)$ đến cấp 2 ta được

$$
\begin{aligned}
a_{ijk}\big[x, f_j\big] - a_{ijk}\big[x, f_j^{(\nu-1)}\big] = {} & \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\big[x, f_j^{(\nu-1)}\big]\left(f_j - f_j^{(\nu-1)}\right) + \\
& + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2}\big[x, \lambda_j^{(\nu)}\big]\left(f_j - f_j^{(\nu-1)}\right)^2
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

trong đó

$$\lambda_j^{(\nu)} = f_j^{(\nu-1)} + \theta_j^{(\nu)} e_j^{(\nu-1)} \ , \ \ 0 < \theta_j^{(\nu)} < 1.$$

Thay (5.22) vào (5.21) với các đối số của $f_j,\ f_j^{(\nu-1)}, \lambda_j^{(\nu)}$ trong (5.22) thay bởi $S_{ijk}(x)$ ta được

$$
\begin{aligned}
e_j^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\Big\{ & \frac{\partial a_{ijk}}{\partial y}\big[x, f_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\big] e_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) \\
& + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 a_{ijk}}{\partial y^2}\big[x, \lambda_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x))\big]\big|e_j^{(\nu-1)}(S_{ijk}(x))\big|^2\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

Ta suy ra từ (5.23) rằng

$$\left|e_j^{(\nu)}(x)\right| \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} A_{ijk}^{(1)}(M)\left\|e_j^{(\nu)}\right\|_{X_j} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2!}A_{ijk}^{(2)}(M)\left\|e_j^{(\nu-1)}\right\|_{X_j}^2$$

$$(5.24) \qquad \le \sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(1)}(M)\left\|e_j^{(\nu)}\right\|_X + \frac{1}{2!}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(2)}(M)\sum_{j=1}^{n}\left\|e_j^{(\nu-1)}\right\|_{X_j}^2$$

Ta chú ý rằng

$$(5.25) \qquad \sum_{j=1}^{n}\left\|e_j^{(\nu-1)}\right\|_{X_j}^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|e_j^{(\nu-1)}\right\|_{X_j}\right)^2 = \left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2.$$

Từ (5.24), lấy sup trên Ω_i, sau đó lấy tổng theo i và kết hợp với (5.25) ta được

$$(5.26) \quad \left\|e^{(\nu)}\right\|_X = \sum_{i=1}^{n}\left\|e_i^{(\nu)}\right\|_{X_i}^2 \le \sigma_M\left\|e^{(\nu)}\right\|_X + \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n} A_{ijk}^{(2)}(M)\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2 .$$

Do đó từ (5.26) ta được (5.10) và vì vậy (5.13) được suy ra dễ dàng.

5.2 Áp dụng

Trong phần này ta xét hệ phương trình hàm sau

$$(5.27) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j\left(S_{ijk}(x)\right) = g_i(x)\,,\ x \in \Omega_i\,,\ 1 \le i \le n,$$

$\Omega_i \subset R^p$ là tập compact hoặc không,

$S_{ij}:\Omega_i \to \Omega_j$, $g_i:\Omega_i \to R$ là các hàm số liên tục cho trước,

a_{ij} là các hằng số thực,

$f_i:\Omega_i \to R$ là các ẩn hàm.

Nếu $S_{ii}:\Omega_i \to \Omega_j$ là song ánh liên tục sao cho hàm ngược $S_{ii}^{-1}:\Omega_i \to \Omega_i$ cũng liên tục và $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, khi đó (5.27) tương đương với hệ sau

(5.28) $$f_i(x) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} f_j\left(S_{ij} \circ S_{ii}^{-1}(x)\right) + \frac{1}{a_{ii}} g_i\left(S_{ii}^{-1}(x)\right), \quad x \in \Omega_i, \ i = \overline{1,n}.$$

Đặt

(2.29)
$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{ii} &= 0 \quad , \quad i = \overline{1, n}, \\
\tilde{a}_{ij} &= -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad , \ i \neq j , \\
\tilde{S}_{ij}(x) &= S_{ij} \circ S_{ii}^{-1}(x) , \\
\tilde{g}_i(x) &= \frac{1}{a_{ii}} g_i\left(S_{ii}^{-1}(x)\right).
\end{aligned}$$

Khi đó (2.28) viết lại

(5.30) $$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} f_j\left(\tilde{S}_{ij}(x)\right) + \tilde{g}_i(x), \quad x \in \Omega_i, \ i = \overline{1,n}.$$

Hệ (5.30) là trường hợp riêng của hệ (1.1) ứng với m = 1 và $a_{ijk}(x, y) = \tilde{a}_{ij}. y \ (k = 1)$. Khi đó ta có định lý sau

<u>Định lý 5.3</u>

Giả thiết

(A_1) $g \in X$,

(A_2) $a_{ii} \neq 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, $\sigma = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$,

(A_3) $S_{ij}: \Omega_i \to \Omega_j$ *liên tục* $\forall i = 1,2,\ldots,n$ *sao cho*

$S_{ii}: \Omega_i \to \Omega_j$ *là song ánh, liên tục và hàm ngược*

$S_{ii}^{-1}: \Omega_i \to \Omega_j$ *cũng liên tục.*

Khi đó hệ (5.27) *tồn tại duy nhất lời giải* $f \in X$.

<u>Chứng minh</u>

Hệ (5.27) hoặc (5.30) tương đương với phương trình toán tử trong X như sau

(5.31) $\qquad f = Tf$, với $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \in X$.

(5.32) $\qquad Tf = ((Tf)_1, (Tf)_2, \ldots, (Tf)_n)$,

với $\qquad (Tf)_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} f_j\left(\tilde{S}_{ij}(x)\right) + \tilde{g}_i(x)$, $x \in \Omega_i$, $1 \le i \le n$.

$X = X_1 \times X_2 \times \cdots X_n$ là không gian Banach với chuẩn được chọn như sau

(5.33) $\qquad \|f\|_X = \max_{1 \le i \le n} \|f_i\|_{X_i}$.

Ta nghiệm lại dễ dàng rằng $T: X \to X$ thỏa

(5.34) $\qquad \|Tf - T\tilde{f}\|_X \le \sigma \|f - \tilde{f}\|_X, \forall f, \tilde{f} \in X$.

Do đó định lý 5.3 được chứng minh.

PHẦN KẾT LUẬN

Luận văn chủ yếu khảo sát sự tồn tại duy nhất và ổn định của lời giải hệ phương trình hàm phi tuyến và tuyến tính bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Banach. Một số tính chất đinh tính của lời giải trong một lớp các hệ phương trình hàm đặc biệt cũng được nghiên cứu. Sau cùng là phần nghiên cứu thuật giải lặp hội tụ cấp hai và chú ý đến một áp dụng vào hệ phương trình hàm tuyến tính đặc biệt.

Phần chính của luận văn nằm ở các chương 3, 4 và 5.

Trong chương 3, chúng tôi thu được một số kết quả về sự tồn tại, duy nhất và ổn định lời giải $\left(f_1, f_2, ..., f_n\right)$ của hệ phương trình hàm phi tuyến (1.1), ở đây mỗi thành phần f_i của lời giải có miền xác định $\Omega_i \subset R^p$. Kết quả này tổng quát hơn kết quả trong [5] với p = 1, $\Omega_i = \Omega$, $1 \le i \le n$, Ω là khoảng bị chặn hoặc không bị chặn của R; tổng quát hơn trong [1] với p = 1, m = n = 2, $\Omega_i = \Omega = [-b, b]$, $1 \le i \le 2$, S_{ijk} là hàm bậc nhất. Một số trường hợp riêng của hệ (1.1) cũng cho kết quả tổng quát hơn trong [1], [5].

Trong chương 4, chúng tôi thu được khai triển Maclaurin của lời giải hệ phương trình hàm tuyến tính (3.20) với trường hợp S_{ijk} là hàm *affine*. Từ đó chúng tôi đã xây dựng được công thức lời giải (4.59). Hơn nữa, nếu g_i là các đa thức thì lời giải thu được cũng là đa thức cùng bậc với g_i, nếu g_i liên tục thì lời giải thu được được xấp xỉ bởi dãy các đa thức hội tụ đều. Kết quả này cũng tổng quát hóa các kết quả trong [1], [5].

Trong chương 5, chúng tôi khảo sát một thuật giải lặp cấp hai cho hệ (1.1). Kết quả phần này là thu được điều kiện trên các hàm a_{ijk} để có được thuật giải lặp hội tụ đến cấp hai. Phần cuối của chương này là áp dụng vào một hệ phương trình hàm đặc biệt mà được đưa về hệ (1.1) với $m = 1$.

Các kết quả thu được từ các chương 3, 4, 5 là mới và chưa được công bố.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **C.Q. Wu, Q.W. Xuan, D.Y. Zhu,** The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system, *SEA. Bull.Math.* **15** (1991), 109-115.

[2] **T. Kostrzewski,** Existence and uniqueness of BC[a,b] solutions of nonlinear functional equation, *Demonstratio Math.* **26** (1993), 61-74.

[3] **T. Kostrzewski,** BC-solutions of nonlinear functional equation. A nonuniqueness case,*Demonstratio Math.* **26** (1993), 275-285.

[4] **M. Lupa,** On solutions of a functional equation in a special class of functions, *Demonstratio Math.* **26** (1993), 137-147.

[5] **Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Đinh Văn Ruy,** On a system of functional equations, *Demonstratio Math.* **31** (1998), 313-324.

[6] **J. Knop, T. Kostrzewski, M. Lupa, M. Wróbel,** On a special case of the Golab-Schinzel functional equation, *Demonstratio Math.* **30** (1997), 475-478.