BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
----------------o0o------------------

ĐẶNG THỤC HIỀN

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM: PHƯƠNG PHÁP LẶP CẤP HAI VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2003

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐẶNG THỤC HIỀN

HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM: PHƯƠNG PHÁP LẶP CẤP HAI VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN

Luận văn Thạc sỹ Toán học

Chuyên ngành: Toán Giải Tích
Mã số: 1. 01. 01
Người hướng dẫn: **TS. Nguyễn Thành Long**
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2003

Luận văn được hoàn thành tại:
Trường Đại học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh.

Người hướng dẫn: **TS. Nguyễn Thành Long**
Khoa Toán- tin học,
Đại học Khoa Học Tự Nhiên Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét 1: **PGS. TS. Nguyễn Bích Huy**
Khoa Toán- tin học,
Đại học Sư Phạm Tp. Hồ Chí Minh.

Người nhận xét 2: **TS. Trần Minh Thuyết**
Khoa Thống kê-Toán- tin học,
Đại học Kinh tế Tp. Hồ Chí Minh.

Học viên cao học: **Đặng Thục Hiền**
Trường Cao đẳng Giao thông khu vực 3.

Luận văn sẽ được bảo vệ tại Hội Đồng chấm luận án cấp Trường tại Trường Đại học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh
vào lúc ……giờ……ngày …..tháng…..năm 2003

Có thể tìm hiểu luận văn tại Phòng Sau Đại học, thư viện Trường Đại Học Sư Phạm TP. Hồ Chí Minh.

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
2003

LỜI CẢM ƠN

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1
TỔNG QUAN

Trong luận văn nầy, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm sau đây

$$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\big(f_j(R_{ijk}(x))\big) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x), \qquad (1.1)$$

$\forall x \in \Omega;\ i = 1,...,n,$ trong đó $\Omega = [a,b]$ hoặc Ω là một khoảng không bị chận của $IR,$ a_{ijk}, b_{ijk} là các hằng số thực cho trước; $g_i : \Omega \to IR,\ R_{ijk},\ S_{ijk} : \Omega \to \Omega,$ và $\Phi : IR \to IR$ là các hàm số liên tục cho trước thoả một số điều kiện nào đó mà ta sẽ chỉ rõ sau đó. Các hàm $f_i : \Omega \to IR$ là các ẩn hàm, ε là một tham số bé.

Trong trường hợp riêng $\Phi(y) = y^2$, $R_{ijk} = S_{ijk}$, hệ (1.1) được nghiên cứu bởi các tác giả N.T. Long, N.H. Nghĩa, T.N. Diễm[6]; L.T. Vân [11].

Trong [12], các tác giả C.Q. Wu, Q.W. Xuan, D.Y. Zhu đã nghiên cứu hệ (1.1) sau đây ứng với $\Omega = [-b,b],\ m = n = 2,\ a_{ijk} = 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất.

$$\begin{cases} f_1(x) = a_{11}f_1(b_{11}x + c_{11}) + a_{12}f_2(b_{12}x + c_{12}) \\ \qquad\qquad + a_{13}f_1(b_{13}x + c_{13}) + g_1(x), \\ f_2(x) = a_{21}f_1(b_{21}x + c_{21}) + a_{22}f_2(b_{22}x + c_{22}) \\ \qquad\qquad + a_{23}f_2(b_{23}x + c_{23}) + g_2(x), \end{cases} \qquad (1.2)$$

với mọi $x \in \Omega = [-b,b],$ trong đó, các hằng số $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, b$ cho trước thỏa các điều kiện:

$$\left|b_{ij}\right| < 1,\ b \geq \max_{i,j}\ [\ \frac{\left|c_{ij}\right|}{1-\left|b_{ij}\right|}\ ],\ \ \max_i\ (\ \sum_{j=1}^{3}\left|a_{ij}\right|\ ) < 1, \qquad (1.3)$$

các hàm số g_1, g_2 liên tục cho trước và f_1, f_2 là các ẩn hàm. Nghiệm của hệ (1.2) lúc này cũng được xấp xỉ bởi một dãy qui nạp hội tụ đều và ổn định đối với các g_i.

Trong [9], các tác giả Nghĩa, Khôi đã xét hệ phương trình hàm cụ thể sau đây để làm kiểm tra một thuật toán số

$$\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{100} f_1(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{1}{200} f_1(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}) + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4}) + g_1(x), \\ f_2(x) = \dfrac{1}{100} f_1(\dfrac{x}{4}) + \dfrac{1}{200} f_1(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}) + \dfrac{1}{100} f_2(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{1}{200} f_2(\dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{4}) + g_2(x), \end{cases} \quad (1.4)$$

với mọi $x \in [-1,1]$, trong đó g_1, g_2 được chọn sao cho hệ (1.4) có nghiệm chính xác biết trước.

Trong [3], các tác giả Long, Nghĩa, Ruy, Khôi đã nghiên cứu một trường hợp riêng của (1.1) với $a_{ijk} = 0$ và $\Omega = [-b,b]$ hay Ω là khoảng không bị chặn của IR. Bằng cách sử dụng định lý điểm bất động Banach, trong [3] đã thu được kết quả về sự tồn tại, duy nhất và tính ổn định nghiệm của hệ (1.1) đối với các hàm g_i. Trong trường hợp $a_{ijk} = 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất, $g \in C^r(\Omega; IR^n)$ và $\Omega = [-b,b]$, trong [3] đã thu được một khai triển Maclaurin của nghiệm của hệ (1.1) cho đến cấp r. Hơn nữa, nếu g_i là các đa thức bậc r, thì nghiệm của hệ (1.1) cũng là đa thức bậc r. Kế đó, nếu g_i là các hàm liên tục, nghiệm f của (1.1) được xấp xỉ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều. Sau đó, các kết quả trên đây đã được nới rộng bởi các tác giả Long, Nghĩa[4] cho miền $\Omega \subset IR^p$ nhiều chiều và S_{ijk} là các hàm affine. Hơn nữa, trong [4] cũng cho một điều kiện đủ về sự hội tụ cấp hai. Một số kết quả liên quan đến khai triển tiệm cận của nghiệm cho hệ (1.1) theo một tham số bé ε cũng được xem xét trong bài báo của Long, Nghĩa, Diễm [6] và Long [8].

Gần đây, N.T. Long, P.H. Danh, N.K. Khôi [5] đã nghiên cứu hệ phương trình tích phân-hàm

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2} \left(a_{ij} f_j(b_{ij}x + c_{ij}) + \alpha_{ij} \int_0^{\beta_{ij}x+\gamma_{ij}} f_j(t)dt \right) + g_i(x),\ i = 1,2,\ x \in [-b,b]. \quad (1.7)$$

Sau đó P.H. Danh, H.T.H. Dung, N.T. Long[1] đã xét hệ

$$f_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(a_{ijk} f_j(b_{ijk}x + c_{ijk}) + \alpha_{ikj} \int_0^{\beta_{ijk}x+\gamma_{ijk}} f_j(t)dt \right) + g_i(x), \quad (1.8)$$

$i = 1,2,...,n,\ x \in \Omega = [-b,b],$ trong đó $g_i : \Omega \to IR$ là các hàm liên tục cho trước, $a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk}, \alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk} \in R$ là các hằng số thực cho trước thỏa thêm một số điều kiện phụ. Các tác giả trong [1, 5] đã thiết lập nghiệm $f = (f_1,..., f_n)$ bởi một dãy các đa thức hội tụ đều.

Luận văn nầy được trình bày trong 6 chương, phần kết luận và cuối cùng là phần tài liệu tham khảo.

Trong chương 1, là phần tổng quan về hệ phương trình hàm, một số kết quả đã có trước đó và một số nội dung cần trình bày trong các chương của luận văn.

Trong chương 2, là phần trình bày công cụ chủ yếu để sử dụng cho các chương sau.

Trong chương 3, dựa vào định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm của hệ (1.1).

Trong chương 4, chúng tôi nghiên cứu một điều kiện đủ để thu được thuật giải lặp hội tụ cấp hai cho hệ (1.1). Điều nầy cho phép gia tăng tốc độ hội tụ của thuật giải lặp so với thuật giải xấp xỉ liên tiếp của ánh xạ co.

Trong chương 5, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm (1.1) bị nhiễu bởi một tham số bé ε. Chúng tôi thu được trong chương nầy một khai triển tiệm cận nghiệm của hệ (1.1) đến cấp $N+1$ theo ε, với ε đủ nhỏ theo nghĩa

$$f_\varepsilon = \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} + O(\varepsilon^{N+1})$$

tức là

$$\sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| f_i(x) - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f_i^{[r]}(x) \right| \le C|\varepsilon|^{N+1},$$

trong đó C là một hằng số độc lập với ε.

Trong chương 6, chúng tôi nghiên cứu một số ví dụ hệ phương trình hàm cụ thể với thuộc dạng (1.1) ứng với $m=1, n=2,\ \Omega=[-1,1],\ \Phi(y)=|y|^p, p\ge 2,$ ở đó một thuật giải hội tụ cấp hai và chỉ ra các thành phần trong khai triển tiệm cận đến cấp hai cho hệ được khảo sát.

Phần kết luận nêu lên một số kết quả thu được trong luận văn và một số chú ý kèm theo. Cuối cùng là phần tài liệu tham khảo.

CHƯƠNG 2

CÁC KÝ HIỆU VÀ KHÔNG GIAN HÀM

Trong chương 2, là phần giới thiệu về các ký hiệu, các không gian hàm và một số công cụ cơ bản được sử dụng trong luận văn.

2.1. Các ký hiệu

Ta ký hiệu $\Omega = [a,b]$ hay Ω là khoảng không bị chặn trong IR.
Với $\Omega = [a,b]$, ta ký hiệu $X = C(\Omega; IR^n)$ là không gian Banach của các hàm số $f = (f_1,...,f_n) : \Omega \to IR^n$ liên tục trên Ω đối với chuẩn

$$\|f\|_X = \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|. \tag{2.1}$$

Khi Ω là khoảng không bị chặn, ta ký hiệu $X = C_b(\Omega; IR^n)$ là không gian Banach của các hàm số $f : \Omega \to IR^n$ liên tục, bị chặn trên Ω đối với chuẩn (2.1).

Tương tự, với số nguyên không âm $m,$ ta đặt

$$C^m(\Omega; IR^n) = \{f = (f_1,...,f_n) \in C(\Omega; IR^n) : f_i^{(k)} \in C(\Omega; IR),\ 0 \le k \le m,\ 1 \le i \le n\}.$$

Với Ω là khoảng không bị chặn, ta ký hiệu

$$C_b^m(\Omega; IR^n) = \{f = (f_1,...,f_n) \in C_b(\Omega; IR^n) : f_i^{(k)} \in C_b(\Omega; IR),\ 0 \le k \le m,\ 1 \le i \le n\}.$$

Mặt khác, $C^m(\Omega; IR^n)$ và $C_b^m(\Omega; IR^n)$ cũng là các không gian Banach đối với chuẩn

$$\|f\|_m = \max_{1\le k\le m} \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|f_i^{(k)}(x)\right|. \tag{2.2}$$

2.2. Định lý điểm bất động Banach

Định lý điểm bất động sau đây được sử dụng nhiều lần trong các chương sau.

Định lý 2.1.(Định lý điểm bất động Banach) *Cho* X *là không gian Banach với chuẩn* $\|\cdot\|$, $K \subset X$ *là tập đóng. Cho* $T : K \to K$ *là ánh xạ thỏa mãn: Tồn tại số thực* $\sigma, 0 \le \sigma < 1$ *sao cho*

$$\|Tf - Tg\| \le \sigma \|f - g\|, \quad \forall f, g \in K. \tag{2.3}$$

Khi đó ta có

(i) *Tồn tại duy nhất* $f \in K$ *sao cho* $f = Tf$.

(ii) *Với mỗi* $f^{(0)} \in K$, *xét dãy* $\{f^{(\nu)}\}$ *cho bởi* $f^{(\nu)} = Tf^{(\nu-1)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ *ta có*

(j) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \left\| f^{(\nu)} - f \right\| = 0,$

(jj) $\left\| f^{(\nu)} - f \right\| \le \left\| f^{(0)} - Tf^{(0)} \right\| \dfrac{\sigma^{\nu}}{1 - \sigma}, \; \nu = 1, 2, \ldots$

(jjj) $\left\| f^{(\nu)} - f \right\| \le \dfrac{\sigma}{1 - \sigma} \left\| f^{(\nu)} - f^{(\nu-1)} \right\|, \; \nu = 1, 2, \ldots$

Chứng minh định lý 2.1 có thể tìm thấy trong các sách về nhập môn giải tích.■

CHƯƠNG 3

ĐỊNH LÝ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM

Trong chương nầy, dựa vào định lý điểm bất động Banach, chúng ta chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm của hệ (1.1).

Ta viết hệ (1.1) theo dạng của một phương trình toán tử trong $X \equiv C(\Omega; IR^n)$ (hoặc trong $X = C_b(\Omega; IR^n)$) như sau

$$f = \varepsilon Af + Bf + g \tag{3.1}$$

trong đó

$$f = (f_1, ..., f_n),$$
$$Af = ((Af)_1, ..., (Af)_n),$$
$$Bf = ((Bf)_1, ..., (Bf)_n),$$

với

$$(Af)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right),$$

$$(Bf)_i(x) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)), \quad (1 \le i \le n) \text{ với mọi } x \in \Omega.$$

Ta ký hiệu: $\left\| [b_{ijk}] \right\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \max_{1 \le j \le n} \left| b_{ijk} \right|.$

Đầu tiên, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 3.1. *Giả sử* $\left\| [b_{ijk}] \right\| < 1$ *và* $S_{ijk} : \Omega \to \Omega$ *liên tục. Khi đó:*

i) $\left\| Bf \right\|_X \le \left\| [b_{ijk}] \right\| \left\| f \right\|_X \quad \forall f \in X$.

ii) *Toán tử tuyến tính* $I - B : X \to X$ *là khả đảo và* $\left\| (I-B)^{-1} \right\| \le \dfrac{1}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|}$.

Chứng minh:

i) Ta có:

$$\|Bf\|_X = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}|(Bf)_i(x)| \le \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x))\right|$$

$$\le \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ijk}||f_j(S_{ijk}(x))|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|b_{ijk}|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}|f_j(S_{ijk}(x))| \le \|[b_{ijk}]\|\|f\|_X .$$

ii) Trước hết, ta nghiệm lại rằng $\|B\| < 1$. Thật vậy, do (i) và $\|[b_{ijk}]\| < 1,$ ta chú ý rằng $\|B\| = \sup\limits_{0\ne f\in X}\dfrac{\|Bf\|_X}{\|f\|_X} \le \|[b_{ijk}]\| < 1,$ do đó, $\|B\| < 1.$

Tiếp theo, ta chứng minh rằng $I - B$ khả đảo, tức là, với mỗi $g \in X,$ phương trình $f = Bf + g$ có nghiệm duy nhất $f \in X.$ Thật vậy, xét ánh xạ

$$\delta : X \to X$$
$$f \mapsto \delta f = Bf + g$$

Khi đó, δ là ánh xạ co.

Ta có:

$$\|f\|_X = \|Bf + g\|_X \le \|B\|\|f\|_X + \|g\|_X \quad \text{hay} \quad \|f\|_X \le \frac{\|g\|_X}{1-\|B\|}.$$

Vì $f = (I - B)^{-1}g$ nên $\left\|(I - B)^{-1}g\right\|_X \le \dfrac{\|g\|_X}{1-\|B\|}.$

Vậy

$$\left\|(I - B)^{-1}\right\| = \sup_{0\ne g\in X}\frac{\left\|(I - B)^{-1}g\right\|_X}{\|g\|_X} \le \frac{1}{1-\|B\|} \le \frac{1}{1-\|[b_{ijk}]\|},$$

và Bổ đề 3.1 được chứng minh.■

Do bổ đề 1, ta viết lại hệ (2.1) như sau:

$$f = (I - B)^{-1}(\varepsilon Af + g) \equiv Tf\ . \tag{3.2}$$

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $R_{ijk}, S_{ijk} : \Omega \to \Omega$ liên tục;

(H_2) $g = (g_1,...,g_n) \in X$;

(H_3) $\|[b_{ijk}]\| < 1$;

(H_4) $\Phi : R \to R$ thỏa điều kiện

$$\forall M > 0, \exists C_1(M) > 0 : |\Phi(y) - \Phi(z)| \le C_1(M)|y - z| \quad \forall y, z \in [-M, M].$$

(H_5) $M > \dfrac{2\,\|g\|_X}{1 - \|[b_{ijk}]\|}$ và $0 < \varepsilon_0 < \dfrac{M\left(1 - \|[b_{ijk}]\|\right)}{2\left(MC_1(M) + n|\Phi(0)|\right)\|[a_{ijk}]\|}$.

Với mỗi $M > 0,$ ta đặt $K_M = \{f \in X : \|f\|_X \le M\}$.

Khi đó, ta có bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.2. *Giả sử* (H_1) - (H_4) *đúng. Khi đó, ta có*

i) $\|Af\|_X \le \|[a_{ijk}]\|\left(C_1(M)\|f\|_X + n|\Phi(0)|\right) \quad \forall f \in K_M$,

ii) $\left\|Af - A\tilde{f}\right\|_X \le C_1(M)\|[a_{ijk}]\|\,\left\|f - \tilde{f}\right\|_X \quad \forall f, \tilde{f} \in K_M$.

Chứng minh.

(i) $\forall f \in K_M$,
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|(Af)_i(x)| &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ijk}\Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|a_{ijk}|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|a_{ijk}|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(f_j(x)\right)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|a_{ijk}|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left(C_1(M)|f_j(x)| + |\Phi(0)|\right) \\
&\le \|[a_{ijk}]\|\left(C_1(M)\|f\|_X + n|\Phi(0)|\right).
\end{aligned}$$

Vậy: $\|Af\|_X \le \|[a_{ijk}]\|\left(C_1(M)\|f\|_X + n|\Phi(0)|\right)$.

(ii) $\forall f, \tilde{f} \in K_M$, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}\left|(Af)_i(x)-(A\tilde{f})_i(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ijk}\right|\left|\Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right)-\Phi\left(\tilde{f}_j(R_{ijk}(x))\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right)-\Phi\left(\tilde{f}_j(R_{ijk}(x))\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|\Phi\left(f_j(x)\right)-\Phi\left(\tilde{f}_j(x)\right)\right|$$

$$\le C_1(M)\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|f_j(x)-\tilde{f}_j(x)\right|$$

$$\le C_1(M)\left\|[a_{ijk}]\right\|\left\|f-\tilde{f}\right\|_X .$$

Vậy:

$$\left\|Af - A\tilde{f}\right\|_X \le C_1(M)\left\|[a_{ijk}]\right\|\left\|f-\tilde{f}\right\|_X . \blacksquare$$

Khi đó, ta có định lý sau đây.

Định lý 3.1. *Giả sử* (H_1) - (H_5) *đúng. Khi đó, với mỗi* ε, *với* $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$, *hệ* (3.2) *có một nghiệm duy nhất* $f \in K_M$.

Chứng minh. Hiển nhiên rằng $Tf \in X$, với mọi $f \in X$. Xét $f, \tilde{f} \in K_M$, ta dễ dàng nghiệm lại rằng, do bổ đề 3.1 và 3.2, rằng

$$\|Tf\|_X = \left\|(I-B)^{-1}(\varepsilon\, Af + g)\right\|_X \le \left\|(I-B)^{-1}\right\|\left(\varepsilon\|Af\|_X + \|g\|_X\right)$$

$$\le \frac{1}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|}\left[\varepsilon_0\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(MC_1(M)+n|\Phi(0)|\right)+\|g\|_X\right], \tag{3.3}$$

$$\left\|Tf - T\tilde{f}\right\|_X = \left\|(I-B)^{-1}\varepsilon\,(Af - A\tilde{f})\right\|_X \le \varepsilon_0\left\|(I-B)^{-1}\right\|\left\|Af - A\tilde{f}\right\|_X$$

$$\le \frac{\varepsilon_0 C_1(M)\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|}\left\|f-\tilde{f}\right\|_X . \tag{3.4}$$

Chú ý rằng, từ (H_5) ta có

$$\varepsilon_0\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(MC_1(M)+n|\Phi(0)|\right)+\|g\|_X \le \frac{M}{2}\left(1-\left\|[b_{ijk}]\right\|\right).$$

Từ đây ta suy ra

$$\frac{\varepsilon_0 \left\| [a_{ijk}] \right\| \left(MC_1(M) + n|\Phi(0)| \right) + \|g\|_X}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} \le M \text{ và } \frac{\varepsilon_0 C_1(M) \left\| [a_{ijk}] \right\|}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} < 1. \tag{3.5}$$

Ta suy từ (3.3), (3.4), (3.5) rằng $T : K_M \to K_M$ là ánh xạ co. Khi đó, sử dụng định lý điểm bất động Banach, ta có duy nhất một hàm $f \in K_M$ sao cho $f = Tf$. ■

Chú thích 3.1.

Nhờ định lý điểm bất động Banach, nghiệm f của hệ (3.2) được xấp xỉ bởi thuật giải sau:

$$f^{(\nu)} = Tf^{(\nu-1)} \equiv (I - B)^{-1}(\varepsilon A f^{(\nu-1)} + g), \tag{3.6}$$

$$f^{(0)} \in K_M \qquad \text{cho trước.}$$

Khi đó

$$f^{(\nu)} \to f \text{ trong } X \text{ khi } \nu \to +\infty \tag{3.7}$$

Và

$$\left\| f^{(\nu)} - f \right\|_X \le \frac{\left\| f^{(0)} - Tf^{(0)} \right\|_X}{1 - \sigma} \sigma^\nu, \quad \forall \nu = 1,2,\dots, \tag{3.8}$$

với $$\sigma = \frac{\varepsilon_0 C_1(M) \left\| [a_{ijk}] \right\|}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} < 1.$$

Chú thích 3.2.

Trong trường hợp riêng $\Phi(y) = y^2$, $R_{ijk} = S_{ijk}$, hệ (1.1) được chứng minh tồn tại và duy nhất nghiệm bởi các tác giả N.T. Long, N.H. Nghĩa, T.N. Diễm [6]; L.T. Vân [11].

CHƯƠNG 4
THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI

Trong định lý 3.1 đã cho một thuật giải xấp xỉ liên tiếp (3.6), theo nguyên tắc ánh xạ co, đó cũng là một thuật giải hội tụ cấp 1. Trong phần này chúng ta nghiên cứu một thuật giải cấp hai cho hệ (1.1). Một số điều kiện phụ liên quan đến hệ (1.1) ta sẽ đặt sau.

4.1. THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI

Xét hệ phương trình hàm

$$f_i(x) = \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi\left(f_j(R_{ijk}(x))\right) + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i(x),$$

$$\forall x \in \Omega;\ i = 1,\dots,n, \tag{1.1}$$

Ta giả sử rằng $\Phi \in C^1(IR; IR)$. Dựa vào xấp xỉ sau đây:

$$\Phi(f_j^{(\nu)}) \cong \Phi(f_j^{(\nu-1)}) + \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)})(f_j^{(\nu)} - f_j^{(\nu-1)})\,. \tag{4.1}$$

Ta thu được giải thuật sau đây cho hệ (1.1)

i) Cho trước $f^{(0)} = \left(f_1^{(0)},\dots,f_n^{(0)}\right) \in X.$

ii) Giả sử biết $f^{(\nu-1)} = (f_1^{(\nu-1)},\dots,f_n^{(\nu-1)}) \in X,$ ta xác định $f^{(\nu)} = (f_1^{(\nu)},\dots,f_n^{(\nu)}) \in X$ bởi

$$\begin{aligned} f_i^{(\nu)}(x) &= \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\left[\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))\left(f_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x)) - f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right)\right] \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ijk} f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) + g_i(x), \quad x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,\dots \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ta viết lại (4.2) dưới dạng

$$f_i^{(\nu)}(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x)) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ijk} f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x)) + g_i^{(\nu)}(x),$$

$$x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,\dots \tag{4.3}$$

trong đó $\alpha_{ijk}^{(\nu)}$, $g_i^{(\nu)}$ phụ thuộc vào $f^{(\nu-1)}$ cho bởi:

$$\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) = \varepsilon\, a_{ijk}\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))), \tag{4.4}$$

$$g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x) + \varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Big[\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\Big]. \tag{4.5}$$

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 4.1. *Giả sử* (H_1) - (H_3) *là đúng. Nếu* $f^{(\nu-1)} \in X$ *thỏa*

$$\alpha_\nu \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\sup_{x\in\Omega}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| + \left\|[b_{ijk}]\right\| < 1. \tag{4.6}$$

Khi đó tồn tại duy nhất $f^{(\nu)} \in X$ *là nghiệm của (4.3)–(4.5)* .

Chứng minh.

Hệ (4.3) được viết lại như sau:

$$f^{(\nu)} = T_\nu f^{(\nu)}, \tag{4.7}$$

Với

$$(T_\nu f)_i(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x) f_j(R_{ijk}(x)) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ijk} f_j(S_{ijk}(x)) + g_i^{(\nu)}(x),$$

$$x \in \Omega, 1 \le i \le n, \nu = 1,2,\ldots\ ,\ f = (f_1,\ldots,f_n) \in X. \tag{4.8}$$

Hiển nhiên rằng $T_\nu : X \to X$. Ta chỉ cần nghiệm lại rằng

$$\left\|T_\nu f - T_\nu h\right\|_X \le \alpha_\nu \left\|f - h\right\|_X, \forall f, h \in X. \tag{4.9}$$

Thật vậy, với $f, h \in X$, đặt $\tilde{f} = f - h$, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\left|(T_\nu f)_i(x) - (T_\nu h)_i(x)\right| \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\tilde{f}_j(R_{ijk}(x)) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ijk}\tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right| \\
&\quad \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right|\left|\tilde{f}_j(R_{ijk}(x))\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|b_{ijk}\right|\left|\tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right| \\
&\quad \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \sum_{j=1}^{n}\left|\tilde{f}_j(R_{ijk}(x))\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| \sum_{j=1}^{n}\left|\tilde{f}_j(S_{ijk}(x))\right|
\end{aligned}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \left\|\tilde{f}\right\|_X + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| \left\|\tilde{f}\right\|_X$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| \right] \left\|\tilde{f}\right\|_X$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| + \left\|[b_{ijk}]\right\| \right] \left\|\tilde{f}\right\|_X = \alpha_\nu \left\|f-h\right\|_X .$$

Vậy

$$\left\|T_\nu f - T_\nu h\right\|_X . \le \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left|(T_\nu f)_i(x) - (T_\nu h)_i(x)\right| \le \alpha_\nu \left\|f-h\right\|_X .$$

Sử dụng định lý điểm bất động Banach, định lý 4.1 được chứng minh.■

Định lý 4.2. *Giả sử* $(H_1)-(H_3)$ *đúng. Cho* $a_{ijk} \in IR$. *Khi đó, tồn tại hai hằng số* $M,\ \varepsilon,$ *sao cho: Với* $f^{(0)} \in K_M$ *cho trước, hệ* (4.3)–(4.5) *tồn tại duy nhất nghiệm* $f^{(\nu)}$ *thỏa điều kiện*

$$f^{(\nu)} \in K_M ,\ \forall \nu = 0,1,2,... \tag{4.10}$$

Chứng minh. Giả sử $f^{(0)} \in K_M$, với hai hằng số $M,\ \varepsilon,$ mà ta sẽ chọn sau.

Ta cũng giả sử bằng qui nạp rằng:

$$f^{(\nu-1)} \in K_M . \tag{4.11}$$

Ta sẽ chứng minh rằng $f^{(\nu)} \in K_M$. Với mọi $x\in\Omega,$ ta có từ (4.3) rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f_i^{(\nu)}(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \left|f_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))\right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\left|b_{ijk}\right| \left|f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x))\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|g_i^{(\nu)}(x)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \sum_{j=1}^{n}\left|f_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))\right|$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| \sum_{j=1}^{n}\left|f_j^{(\nu)}(S_{ijk}(x))\right| + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \left\|f^{(\nu)}\right\|_X$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\le j\le n}\left|b_{ijk}\right| \left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| + \left\|[b_{ijk}]\right\| \right) \left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X . \tag{4.12}$$

Do đó

$$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| + \left\|[b_{ijk}]\right\| \right) \left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X . \tag{4.13}$$

Mặt khác, với mọi $x \in \Omega,$ ta có từ (4.4), (4.11), rằng:

$$\left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \leq |\varepsilon| \left|a_{ijk}\right| \left|\Phi^{/}\left(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right)\right| \leq |\varepsilon| \left|a_{ijk}\right| \sup_{|y|\leq M} \left|\Phi^{/}(y)\right| \equiv |\varepsilon| M_1 \left|a_{ijk}\right|, \tag{4.14}$$

trong đó $M_1 = \sup_{|y|\leq M} \left|\Phi^{/}(y)\right|.$

Ta suy từ (4.14) rằng:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} \max_{1\leq j\leq n} \sup_{x\in\Omega} \left|\alpha_{ijk}^{(\nu)}(x)\right| \leq |\varepsilon| M_1 \left\|[a_{ijk}]\right\|. \tag{4.15}$$

Mặt khác, ta cũng có từ (4.5) rằng:

$$g_i^{(\nu)}(x) = g_i(x)$$

$$-\varepsilon \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \left[\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right].$$

Chú ý rằng số hạng trong dấu móc [...] được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
&\left|\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right| \\
&= \left|\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) - \Phi(0) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)) + \Phi(0)\right| \\
&= \left|\Phi^{/}(\theta f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)) + \Phi(0)\right| \\
&\leq \left(\left|\Phi^{/}(\theta f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))\right| + \left|\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))\right| \right) \left|f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right| + \left|\Phi(0)\right| \\
&\leq 2M_1 \left|f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right| + \left|\Phi(0)\right|,
\end{aligned}$$

trong đó số thực $\theta,\ 0 < \theta < 1$ xuất hiện do việc áp dụng định lý Lagrange cho hàm Φ: $\Phi(z) - \Phi(0) = z\Phi^{/}(\theta z)$ với $z = f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)).$

Do đó ta suy ra từ (4.11) rằng

$$\sum_{i=1}^{n}\left|g_i^{(\nu)}(x)\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|g_i(x)\right|$$

$$+|\varepsilon| \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ijk}\right|\left|\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right|$$

$$\le \|g\|_X + |\varepsilon| \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sum_{j=1}^{n}\left(\left|\Phi(0)\right| + 2M_1\left|f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right|\right)$$

$$\le \|g\|_X + |\varepsilon| \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2M_1\left\|f^{(\nu-1)}\right\|_X\right)$$

$$\le \|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2MM_1\right).$$

Vậy

$$\left\|g^{(\nu)}\right\|_X \le \|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2MM_1\right). \tag{4.16}$$

Từ (4.13), (4.15) và (4.16), ta được:

$$\begin{aligned}\left\|f^{(\nu)}\right\|_X &\le \left(|\varepsilon| M_1\left\|[a_{ijk}]\right\| + \left\|[b_{ijk}]\right\|\right)\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \\ &\quad + \|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2MM_1\right).\end{aligned} \tag{4.17}$$

hay

$$\left(1 - \left\|[b_{ijk}]\right\| - |\varepsilon| M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|\right)\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le \|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2MM_1\right).$$

Với $M > 0$ đã chọn như trong (H_5), ta chọn ε sao cho hai điều kiện sau được thỏa:

$$\left\|[b_{ijk}]\right\| + |\varepsilon| M_1\left\|[a_{ijk}]\right\| < 1, \tag{4.18}$$

$$\|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|(3MM_1 + n\left|\Phi(0)\right|) \le (1 - \left\|[b_{ijk}]\right\|)M. \tag{4.19}$$

Khi đó, ta suy ra từ (4.17), (4.18) và (4.19) rằng:

$$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le \frac{\|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(n\left|\Phi(0)\right| + 2MM_1\right)}{1 - \left\|[b_{ijk}]\right\| - |\varepsilon| M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|} \le M. \tag{4.20}$$

Điều nầy khẳng định (4.10).

Ta chú ý rằng (4.19) dẫn đến (4.18), bởi vì (4.19) tương đương với:

$$\|g\|_X + |\varepsilon|\left\|[a_{ijk}]\right\|\left(2MM_1 + n\left|\Phi(0)\right|\right) \le \left(1 - \left\|[b_{ijk}]\right\| - |\varepsilon| M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|\right)M. \tag{4.21}$$

Như vậy, ta chỉ cần chọn ε thỏa (4.19).

Định lý 4.2 được chứng minh hoàn tất.■

4.2. SỰ HỘI TỤ CỦA THUẬT GIẢI LẶP CẤP HAI

Định lý 4.1. và 4.2 đã khẳng định sự tồn tại của một dãy lặp cấp hai trong K_M xác định bởi (4.3)–(4.5). Kết quả sau đây cho ta kết luận dãy nầy là dãy lặp cấp hai và cho một điều kiện đủ để thuật giải nầy hội tụ.

Định lý 4.3. *Giả sử* (H_1), (H_2), (H_3) *đúng. Cho* $a_{ijk} \in IR$. *Khi đó, tồn tại hai hằng số* $M > 0$ *và* ε, *sao cho:*

(i) *Với* $f^{(0)} \in K_M$ *cho trước, dãy* $\{f^{(\nu)}\}$ *xác định bởi hệ* (4.3)–(4.5) *là dãy lặp cấp hai. Chính xác hơn, ta có*

$$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \le \beta_M \left\|f^{(\nu-1)} - f\right\|_X^2, \ \forall \nu = 1,2,... \tag{4.22}$$

trong đó

$$\beta_M = \frac{\frac{|\varepsilon|}{2} M_2 \left\|[a_{ijk}]\right\|}{1 - \left\|[b_{ijk}]\right\| - |\varepsilon| \ M_1 \left\|[a_{ijk}]\right\|}, \quad M_2 = \sup_{|y| \le M} \left|\Phi^{//}(y)\right|, \tag{4.23}$$

và f *là nghiệm của hệ* (1.1).

(ii) *Nếu* $f^{(0)}$ *được chọn đủ gần* f *sao cho*

$$\beta_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X < 1, \tag{4.24}$$

thì dãy $\{f^{(\nu)}\}$ *hội tụ cấp* 2 *về* f *và thỏa một đánh giá sai số*

$$\left\|f^{(\nu)} - f\right\|_X \le \frac{1}{\beta_M}\left(\beta_M \left\|f^{(0)} - f\right\|_X\right)^{2^\nu}, \forall \nu = 1,2,... \tag{4.25}$$

Chứng minh.

i) Ta có:

$$\begin{aligned} e_i^{(\nu)}(x) &= f_i(x) - f_i^{(\nu)}(x) \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[\Phi(f_j(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))f_i^{(\nu)}(R_{ijk}(x))] \\ &\quad + (Be^{(\nu)})_i(x) + g_i(x) - g_i^{(\nu)}(x), \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ijk}[\Phi(f_j(R_{ijk}(x))) - \Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))f_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))] + (Be^{(\nu)})_i(x) \end{aligned}$$

$$-\,\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}\Big[\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))-\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))\,f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\Big]$$

$$=(Be^{(\nu)})_i(x)+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ijk}[\Phi(f_j(R_{ijk}(x)))-\Phi(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))]$$

$$+\,\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))\Big[e_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))-e_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\Big]. \qquad (4.26)$$

Mặt khác, ta có

$$\Phi(f_j(y))-\Phi(f_j^{(\nu-1)}(y))=\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(y))(e_j^{(\nu-1)}(y))+\frac{1}{2}\Phi^{//}(h_j^{(\nu)}(y))\left|e_j^{(\nu-1)}(y)\right|^2,$$

với $y=R_{ijk}(x),\ h_j^{(\nu)}(y)=f_j^{(\nu-1)}(y)+\theta_j e_j^{(\nu-1)}(y),\ \ 0<\theta_j<1.$

Vậy:

$$\begin{aligned}e_i^{(\nu)}(x)&=(Be^{(\nu)})_i(x)\\&\quad+\varepsilon\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ijk}[\Phi^{/}(f_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x)))e_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))]\\&\quad+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ijk}[\Phi^{//}(h_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x)))\left|e_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right|^2].\end{aligned} \qquad (4.27)$$

Với mọi $x\in\Omega,$ ta có từ (4.27) rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\left|e_i^{(\nu)}(x)\right|\le\left\|Be^{(\nu)}\right\|_X+|\varepsilon|M_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|e_j^{(\nu)}(R_{ijk}(x))\right|$$

$$+\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|e_j^{(\nu-1)}(R_{ijk}(x))\right|^2]$$

$$\le\left\|[b_{ijk}]\right\|\left\|e^{(\nu)}\right\|_X+|\varepsilon|M_1\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}\left|a_{ijk}\right|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|e_j^{(\nu)}(x)\right|$$

$$+\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\max_{1\le j\le n}|a_{ijk}|\sup_{x\in\Omega}\sum_{j=1}^{n}\left|e_j^{(\nu-1)}(x)\right|^2]$$

$$\le\left\|[b_{ijk}]\right\|\left\|e^{(\nu)}\right\|_X+|\varepsilon|M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|\left\|e^{(\nu)}\right\|_X+\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\left\|[a_{ijk}]\right\|\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2. \tag{4.28}$$

Điều nầy dẫn đến

$$\left(1-\left\|[b_{ijk}]\right\|-|\varepsilon|\,M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|\right)\left\|e^{(\nu)}\right\|_X\le\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\left\|[a_{ijk}]\right\|\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2.$$

suy ra

$$\left\|e^{(\nu)}\right\|_X\le\frac{\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|-|\varepsilon|\,M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|}\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2\equiv\beta_M\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2,$$

hay $$\left\|f^{(\nu)}-f\right\|_X\le\beta_M\left\|f^{(\nu-1)}-f\right\|_X^2\ ,\ \forall\,\nu=1,2,... \tag{4.29}$$

với $\beta_M=\dfrac{\frac{|\varepsilon|}{2}M_2\left\|[a_{ijk}]\right\|}{1-\left\|[b_{ijk}]\right\|-|\varepsilon|\,M_1\left\|[a_{ijk}]\right\|}$.

(ii) Từ (4.29) ta suy ra

$$\begin{aligned}\left\|e^{(\nu)}\right\|_X&\le\beta_M\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2\le\beta_M\left(\beta_M\left\|e^{(\nu-2)}\right\|_X^2\right)^2\\&=(\beta_M)^{1+2}\left\|e^{(\nu-2)}\right\|_X^{2^2}\le(\beta_M)^{1+2}\left(\beta_M\left\|e^{(\nu-3)}\right\|_X^2\right)^{2^2}\\&=(\beta_M)^{1+2+2^2}\left\|e^{(\nu-3)}\right\|_X^{2^3}\le\ldots\le(\beta_M)^{1+2+2^2+\ldots+2^{\nu-1}}\left\|e^{(0)}\right\|_X^{2^\nu}\\&=(\beta_M)^{\frac{1-2^\nu}{1-2}}\left\|e^{(0)}\right\|_X^{2^\nu}=\frac{1}{\beta_M}\left(\beta_M\left\|e^{(0)}\right\|_X\right)^{2^\nu}.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Bất đẳng thức đánh giá nầy cho phép ta kết luận dãy $\{f^{(\nu)}\}$ hội tụ cấp 2 đến nghiệm f của hệ (1.1) nếu $f^{(0)}$ được chọn thỏa (4.24).■

Chú thích 4.1:

Về việc chọn bước lặp ban đầu $f^{(0)} \in K_M$ thỏa (4.24) ta cần qua một công đoạn phụ như sau:

- Trước hết ta lấy $z^{(0)} \in X$,

- Xây dựng dãy lặp đơn $\{z^{(\eta)}\}$ liên kết với ánh xạ co $T : K_M \to K_M$ (như trong định lý 3.1, chương 3):

$$z^{(\eta)} = Tz^{(\eta-1)} \equiv (I - B)^{-1}(\varepsilon Az^{(\eta-1)} + g), \quad \eta = 1,2,\ldots . \tag{4.31}$$

- Khi đó dãy $\{z^{(\eta)}\}$ hội tụ trong X về nghiệm f của (1.1) và ta có một đánh giá sai số

$$\left\| f - z^{(\eta)} \right\|_X \leq \left\| z^{(0)} - Tz^{(0)} \right\|_X \times \frac{\sigma^\eta}{1-\sigma}, \qquad \forall \eta = 1,2,\ldots \tag{4.32}$$

với

$$\sigma = \frac{2\varepsilon M \left\| [a_{ijk}] \right\|}{1 - \left\| [b_{ijk}] \right\|} < 1. \tag{4.33}$$

- Từ (4.32), (4.33), ta chọn $\eta_0 \in N$ đủ lớn sao cho:

$$\beta_M \left\| f - z^{(\eta_0)} \right\|_X \leq \beta_M \left\| z^{(0)} - Tz^{(0)} \right\|_X \times \frac{\sigma^{\eta_0}}{1-\sigma} < 1. \tag{4.34}$$

Vậy ta chọn bước lặp ban đầu $f^{(0)} = z^{(\eta_0)}$. ■

CHƯƠNG 5
KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Trong chương nầy, chúng tôi nghiên cứu hệ phương trình hàm (1.1) bị nhiễu bởi một tham số bé ε. Với các giả thiết trên các hàm S_{ijk}, g và các số thực a_{ijk}, b_{ijk}, ε_0, M chúng tôi sẽ chứng minh rằng nghiệm của hệ (1.1) có một khai triển tiệm cận đến cấp $N+1$ theo ε thu được, với ε đủ nhỏ theo nghĩa

$$f_\varepsilon = \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} + O(\varepsilon^{N+1})$$

tức là

$$\left\| f_\varepsilon - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \right\|_X \le C|\varepsilon|^{N+1},$$

trong đó C là một hằng số độc lập với ε.
Trong phần nầy, ta giả sử rằng các hàm S_{ijk}, g và các số thực a_{ijk}, b_{ijk}, ε_0, M thỏa các giả thiết (H_1) - (H_5), lần lượt.

Giả thiết (H_6) $\Phi \in C^N(IR; IR)$.

Ta xét hệ bị nhiễu (3.2), trong đó ε là một tham số bé, $|\varepsilon| \le \varepsilon_0$. Đặt $L = I - B$. Ta hãy xét dãy hàm $\{f^{[r]}\}$, $r = 0,1,2,...,N$, $f^{[r]} \in K_M$ (với hằng số thích hợp $M > 0$) được xác định bởi các hệ sau:

$$Lf^{[0]} = g \equiv P^{[0]}, \tag{5.1}$$

$$Lf^{[1]} = P^{[1]} \equiv Af^{[0]}, \tag{5.2}$$

$$Lf^{[r]} = P^{[r]}, \ r = 2,3,...,N, \tag{5.3}$$

trong đó

$$P^{[r]} = (P_1^{[r]}, P_2^{[r]}, ..., P_n^{[r]}),\ r = 0,1,...,N,$$

$$P_i^{[1]}(x) = (Af^{[0]})_i(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi(f_j^{[0]}(R_{ijk}(x))), \tag{5.4}$$

$$P_i^{[2]}(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}\Phi^{/}(f_j^{[0]}(R_{ijk}(x)))f_j^{[1]}(R_{ijk}(x)), \tag{5.5}$$

với $p = 3,4,...,N$,

$$P_i^{[p]}(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{p-1}\Phi^{(r)}(f_j^{[0]}(R_{ijk}(x))) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p-1} \frac{1}{\gamma!}\vec{f}_j^{\,\gamma}(R_{ijk}(x)), \tag{5.6}$$

ở trên, ta đã sử dụng các ký hiệu sau:
Với một đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_N) \in Z_+^N$, ta đặt

$$\gamma! = \gamma_1!...\gamma_N!,\quad |\gamma| = \gamma_1 + ... + \gamma_N,\quad \eta(\gamma) = \sum_{i=1}^{N} i\gamma_i,$$

$$\vec{f}_j = (f_j^{[1]}, f_j^{[2]}, ..., f_j^{[N]}),\quad \vec{f}_j^{\,\gamma} = (f_j^{[1]})^{\gamma_1}(f_j^{[2]})^{\gamma_2}...(f_j^{[N]})^{\gamma_N}. \tag{5.7}$$

Đặt

$$h = f^{[0]} + \sum_{r=1}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \equiv f^{[0]} + U, \tag{5.8}$$

khi đó $v = f_\varepsilon - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \equiv f_\varepsilon - h,$ thỏa hệ

$$Lv = \varepsilon[A(v+h) - Ah] + E_\varepsilon, \tag{5.9}$$

trong đó

$$E_\varepsilon = \varepsilon\,[A(f^{[0]} + U) - A(f^{[0]})] - \sum_{r=2}^{N} \varepsilon^r P^{[r]}. \tag{5.10}$$

Trước tiên, ta cần các bổ đề sau đây.

Bổ đề 5.1. *Ta có*

$$(\varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + ... + \varepsilon^N x_N)^r = \sum_{p=r}^{rN} \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{r!}{\gamma!} x^\gamma \varepsilon^p, \tag{5.11}$$

$\forall x = (x_1, ..., x_N) \in IR^N,\ \forall \varepsilon \in IR,\ \forall r, N \in IN.$

Chứng minh.

Trường hợp $N = 2$:

$$(x_1 + x_2)^r = \sum_{\gamma_1+\gamma_2=r,\gamma_1\geq 0,\gamma_2\geq 0} \frac{r!}{\gamma_1!\gamma_2!} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} = \sum_{|\gamma|=r} \frac{r!}{\gamma!} x^\gamma$$

Trường hợp $N = 3$:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^r = \sum_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=r,\gamma_1\geq 0,\gamma_2\geq 0,\gamma_3\geq 0} \frac{r!}{\gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_3^{\gamma_3} = \sum_{|\gamma|=r} \frac{r!}{\gamma!} x^\gamma$$

Trường hợp N tùy ý:

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^r = \sum_{\gamma_i\geq 0,\sum_{i=1}^{N}\gamma_i=r} \frac{r!}{\gamma_1!\gamma_2!...\gamma_N!} x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} ... x_N^{\gamma_N} = \sum_{|\gamma|=r} \frac{r!}{\gamma!} x^\gamma. \tag{5.12}$$

Áp dụng (5.12) với x_i thay bởi $\varepsilon^i x_i$, ta có:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\varepsilon^i x_i\right)^r = \sum_{|\gamma|=r}\frac{r!}{\gamma!}(\varepsilon x_1)^{\gamma_1}(\varepsilon^2 x_2)^{\gamma_2}...(\varepsilon^N x_N)^{\gamma_N}$$

$$= \sum_{|\gamma|=r}\frac{r!}{\gamma!}x_1^{\gamma_1}x_2^{\gamma_2}...x_N^{\gamma_N}\ \varepsilon^{\gamma_1+2\gamma_2+3\gamma_3+...+N\gamma_N}$$

$$= \sum_{|\gamma|=r}\frac{r!}{\gamma!}x^{\gamma}\varepsilon^{\eta(\gamma)} = \sum_{p=r}^{rN}\left(\sum_{|\gamma|=r,\eta(\gamma)=p}\frac{r!}{\gamma!}x^{\gamma}\right)\varepsilon^p .$$

Vậy bổ đề 5.1 được chứng minh.

Bổ đề 5.2. *Ta có*

$$\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=r}^{rN}C_{rp}\varepsilon^p = \sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p}C_{rp}\varepsilon^p + \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN}C_{rp}\varepsilon^p , \tag{5.13}$$

trong đó $\varepsilon, C_{rp} \in IR,\ 1 \le r \le N-1,\ 1 \le p \le N(N-1),\ N = 2,3,...$

Chứng minh.

Trước hết, ta chứng minh đẳng thức $\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p}\alpha_{rp} = \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=r}^{N-1}\alpha_{rp}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p}\alpha_{rp} &= \sum_{r=1}^{1}\alpha_{r1} + \sum_{r=1}^{2}\alpha_{r2} + ... + \sum_{r=1}^{N-1}\alpha_{r\,N-1}\\ &= \alpha_{11}\\ &+\ \alpha_{12} + \alpha_{22}\\ &+\ \alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}\\ &+ ....\\ &+\ \alpha_{1N\text{-}1} + \alpha_{2\,N\text{-}1} + \alpha_{3\,N\text{-}1} + ... + \alpha_{N-1\,N-1}\\ &= \sum_{p=1}^{N-1}\alpha_{1p} + \sum_{p=2}^{N-1}\alpha_{2p} + ... + \sum_{p=N-1}^{N-1}\alpha_{N-1\,p}\\ &= \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=r}^{N-1}\alpha_{rp}.\end{aligned}$$

Như vậy

$$\sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=r}^{rN} C_{rp}\varepsilon^p = \sum_{r=1}^{N-1}\left(\sum_{p=r}^{N-1} C_{rp}\varepsilon^p + \sum_{p=N}^{rN} C_{rp}\varepsilon^p\right)$$
$$= \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=r}^{N-1} C_{rp}\varepsilon^p + \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} C_{rp}\varepsilon^p$$
$$= \sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p} C_{rp}\varepsilon^p + \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} C_{rp}\varepsilon^p.$$

Vậy bổ đề 5.2 được chứng minh.

Bổ đề 5.3. *Giả sử* $(H_1)-(H_5)$ *đúng. Khi đó, ta có*

$$\|E_\varepsilon\|_X \leq C_N^{(1)}|\varepsilon|^{N+1}, \tag{5.14}$$

trong đó $C_N^{(1)}$ *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* N, $\|[a_{ijk}]\|$, $\|f^{[r]}\|_X$, $r = 0,1,...,N$.

Chứng minh. Trong trường hợp $N = 1$, chứng minh của bổ đề 5.1 thì dễ dàng, do đó ta bỏ qua chi tiết, mà ta chỉ chứng minh với $N \geq 2$. Để cho gọn, ta bỏ qua $R_{ijk}(x)$ trong các cách viết.

Ta có

$$A(f^{[0]}+U)_i - A(f^{[0]})_i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}[\Phi(f_j^{[0]}+U_j)-\Phi(f_j^{[0]})].$$

Bằng việc khai triển Maclaurin của hàm $\Phi(f_j^{[0]}+U_j)-\Phi(f_j^{[0]})$ xung quanh điểm $f_j^{[0]}$ đến cấp N, áp dụng các bổ đề 5.1, 5.2, sau đó tiến hành sắp xếp lại theo bậc của ε, ta thu được (ta bỏ qua đối số $S_{ijk}(x)$ trong các cách viết)

$$\Phi(f_j^{[0]}+U_j)-\Phi(f_j^{[0]}) = \sum_{r=1}^{N-1}\frac{1}{r!}\Phi^{(r)}(f_j^{[0]})U_j^r + \frac{1}{N!}\Phi^{(N)}(f_j^{[0]}+\tilde{\theta}_j U_j)U_j^N,$$

$$U_j^r = \left(\sum_{r=1}^{N}\varepsilon^r f_j^{[r]}\right)^r = \sum_{p=r}^{rN}\sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p}\frac{r!}{\gamma!}\vec{f}_j^{\gamma}\varepsilon^p, \text{ (do bổ đề 5.1)}$$

$$\begin{aligned}\Phi(f_j^{[0]}+U_j)-\Phi(f_j^{[0]}) &= \sum_{r=1}^{N-1}\frac{1}{r!}\Phi^{(r)}(f_j^{[0]})\sum_{p=r}^{rN}\sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p}\frac{r!}{\gamma!}\vec{f}_j^{\gamma}\varepsilon^p \\ &\quad + \frac{1}{N!}\Phi^{(N)}(f_j^{[0]}+\tilde{\theta}_j U_j)\sum_{p=N}^{N^2}\sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p}\frac{N!}{\gamma!}\vec{f}_j^{\gamma}\varepsilon^p \\ &= \sum_{r=1}^{N-1}\Phi^{(r)}(f_j^{[0]})\sum_{p=r}^{rN}\sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p}\frac{1}{\gamma!}\vec{f}_j^{\gamma}\varepsilon^p \\ &\quad + \Phi^{(N)}(f_j^{[0]}+\tilde{\theta}_j U_j)\sum_{p=N}^{N^2}\sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p}\frac{1}{\gamma!}\vec{f}_j^{\gamma}\varepsilon^p.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Áp dụng bổ đề 5.2 với $C_{rp} = \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma}$, ta viết

$$\begin{aligned}
\Phi(f_j^{[0]} + U_j) - \Phi(f_j^{[0]}) &= \sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&+ \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&+ \Phi^{(N)}(f_j^{[0]} + \tilde{\theta}_j U_j) \sum_{p=N}^{N^2} \sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p .
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Thay $\Phi(f_j^{[0]} + U_j) - \Phi(f_j^{[0]})$ vào biểu thức $(A(f^{[0]} + U) - A(f^{[0]}))_i$ ta thu được:

$$A(f^{[0]} + U)_i - A(f^{[0]})_i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} [\Phi(f_j^{[0]} + U_j) - \Phi(f_j^{[0]})]$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{p=1}^{N-1}\sum_{r=1}^{p} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \Phi^{(N)}(f_j^{[0]} + \tilde{\theta}_j U_j) \sum_{p=N}^{N^2} \sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{p} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \right) \varepsilon^p \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \Phi^{(N)}(f_j^{[0]} + \tilde{\theta}_j U_j) \sum_{p=N}^{N^2} \sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{p} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \right) \varepsilon^p + \varepsilon^N R_N[\Phi, \varepsilon, i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{p} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \right) \varepsilon^p + \varepsilon^N R_N[\Phi, \varepsilon, i] \\
&= \sum_{p=1}^{N-1} P_i^{[p+1]}(x) \varepsilon^p + \varepsilon^N R_N[\Phi, \varepsilon, i],
\end{aligned} \tag{5.17}$$

với

$$\varepsilon^N R_N[\Phi,\varepsilon] = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \sum_{r=1}^{N-1}\sum_{p=N}^{rN} \Phi^{(r)}(f_j^{[0]}) \sum_{|\gamma|=r,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p$$
$$+ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} \Phi^{(N)}(f_j^{[0]} + \tilde{\theta}_j U_j) \sum_{p=N}^{N^2} \sum_{|\gamma|=N,\ \eta(\gamma)=p} \frac{1}{\gamma!} \vec{f}_j^{\gamma} \varepsilon^p. \tag{5.18}$$

Ta suy ra từ (5.4), (5.5), (5.10), (5.18) rằng

$$E_{\varepsilon i} = \varepsilon(A(f^{[0]} + U)_i - A(f^{[0]}))_i - \sum_{r=2}^{N} \varepsilon^p P_i^{[p]}$$
$$= \sum_{p=1}^{N-1} P_i^{[p+1]}(x)\varepsilon^{p+1} + \varepsilon^{N+1} R_N[\Phi,\varepsilon] - \sum_{p=2}^{N} P_i^{[p]}(x)\varepsilon^p = \varepsilon^{N+1} R_N[\Phi,\varepsilon,i]. \tag{5.19}$$

Mặt khác, $E_\varepsilon = (E_{\varepsilon 1},...,E_{\varepsilon n}) = \varepsilon^{N+1} R_N[\Phi,\varepsilon] = \varepsilon^{N+1}(R_N[\Phi,\varepsilon,1],...,R_N[\Phi,\varepsilon,n])$, do đó, ta suy ra rằng

$$\|E_\varepsilon\|_X = \sup_{x\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} |E_{\varepsilon i}(x)| = |\varepsilon|^{N+1} \|R_N[\Phi,\varepsilon]\|_X \le C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1}. \tag{5.20}$$

Bổ đề 5.3 được chứng minh hoàn tất.■

Định lý sau đây cho một kết quả về khai triển tiệm cận của nghiệm theo ε.

Định lý 5.1. *Giả sử* $(H_1) - (H_6)$. *Khi đó, tồn tại một hằng số* $\varepsilon_1 > 0$ *sao cho, với mỗi* ε, *với* $|\varepsilon| \le \varepsilon_1$, *hệ* (3.2) *có duy nhất một nghiệm* $f_\varepsilon \in K_M$ *thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp N+1 như sau:*

$$\left\| f_\varepsilon - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \right\|_X \le 2\|L^{-1}\| C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1}, \tag{5.21}$$

các hàm $f^{[r]}$, $r = 0,1,...,N$ *là các nghiệm của các hệ* (5.1)-(5.5), *lần lượt.*

Chứng minh. Đặt $v = f_\varepsilon - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \equiv f_\varepsilon - h$.

Ta có

$$Lv = \varepsilon[A(v+h) - Ah] + E_\varepsilon,$$
$$v = L^{-1}[\varepsilon(A(v+h) - Ah) + E_\varepsilon]. \tag{5.22}$$

Do đó, ta suy từ bổ đề 5.3 rằng

$$\begin{aligned}\|v\|_X &\le \left\|L^{-1}\right\| [|\varepsilon| \|A(v+h) - Ah\|_X + \|E_\varepsilon\|_X] \\ &\le \left\|L^{-1}\right\| [|\varepsilon| \ \|A(v+h) - Ah\|_X + C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1}]. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Mặt khác

$$\|v+h\|_X = \|f_\varepsilon\|_X \le M, \quad \|h\|_X \le \sum_{r=0}^{N} \left\|f^{[r]}\right\|_X \equiv \widetilde{M}, \tag{5.24}$$

ta suy từ (5.24) rằng

$$\|A(v+h) - Ah\|_X \le (M + \widetilde{M}) \left\|[a_{ijk}]\right\| \|v\|_X . \tag{5.25}$$

Từ (5.23), (5.25) ta thấy rằng

$$\|v\|_X \le \left\|L^{-1}\right\| [|\varepsilon_1| \ (M + \widetilde{M}) \left\|[a_{ijk}]\right\| \|v\|_X + C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1}]. \tag{5.26}$$

Chọn $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ sao cho

$$|\varepsilon_1| \ (M + \widetilde{M}) \left\|[a_{ijk}]\right\| \left\|L^{-1}\right\| \le \frac{1}{2}. \tag{5.27}$$

Do đó, ta có từ (5.26), (5.27) rằng

$$\|v\|_X \le 2\left\|L^{-1}\right\| C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1},$$

hay

$$\left\| f_\varepsilon - \sum_{r=0}^{N} \varepsilon^r f^{[r]} \right\|_X \le 2\left\|L^{-1}\right\| C_N^{(1)} |\varepsilon|^{N+1}.$$

Định lý 5.1 được chứng minh hoàn tất. ■

Chú thích 5.1. Với $a_{ijk} \in R$ và $g = (g_1, ..., g_n) \in X$ cho trước, giả thiết $\left\|[b_{ijk}]\right\| < 1$ dẫn đến sự tồn tại của hai số dương ε_0, M thỏa các giả thiết (H_4) và (H_5), lần lượt.
Khi đó, ta có kết quả sau:

Định lý 5.2. *Giả sử $(H_1) - (H_3)$ đúng. Cho trước $a_{ijk} \in IR$. Khi đó, tồn tại hai hằng số $M > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, sao cho, với mỗi ε, với $|\varepsilon| \le \varepsilon_1$, hệ (3.2) có duy nhất một nghiệm*

$f_\varepsilon \in K_M$ *có một khai triển tiệm cận đến cấp N+1 như* (5.21), *trong đó các hàm* $f^{[r]}$, $r = 0,1,...,N$ *là các nghiệm của các hệ* (5.1)-(5.6), *lần lượt.*■

CHƯƠNG 6
MỘT SỐ HỆ PHƯƠNG TRÌNH HÀM CỤ THỂ

Trong phần nầy chúng tôi xem xét qua một số ví dụ dựa trên một số hệ phương trình hàm cụ thể. Qua đó chúng tôi xét sự hội tụ của dãy lặp cấp hai liên kết với hệ phương trình hàm nầy. Vẫn trong phần nầy chúng tôi cũng tính toán một số khai triển tiệm cận đến một cấp cho trước của nghiệm theo một tham số bé ε.

6.1. KHẢO SÁT THUẬT GIẢI CẤP HAI.

Chúng tôi xét hệ (1.1) ứng với $m=1, n=2, \Omega=[-1,1], \Phi(y)=|y|^p, p\geq 2,$

$$f_i(x)=\varepsilon\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\left|f_j(r_{ij}x)\right|^p+\sum_{j=1}^{2}b_{ij}f_j(s_{ij}x)+g_i(x),\quad x\in\Omega=[-1,1],\ i=1,2, \tag{6.1}$$

trong đó

$$g_i(x)=x^i-\varepsilon\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\left|(r_{ij}x)^j\right|^p-\sum_{j=1}^{2}b_{ij}(s_{ij}x)^j \tag{6.2}$$

và $a_{ij}, b_{ij}, r_{ij}, s_{ij}$ là các số thực cho trước thỏa

$$\left\|[b_{ij}]\right\|=\sum_{i=1}^{2}\max_{1\leq j\leq 2}\left|b_{ij}\right|<1,\quad \left|r_{ij}\right|\leq 1,\quad \left|s_{ij}\right|\leq 1, \tag{6.3}$$

Các hàm $R_{ij}(x)=r_{ij}x,\ S_{ij}(x)=s_{ij}x,\ g_i(x)$ thỏa các giả thiết $(H_1), (H_2)$.

Nghiệm chính xác của hệ (6.1) là

$$f_i(x)=x^i,\quad i=1,2. \tag{6.4}$$

Như trong chương 4, dựa vào xấp xỉ sau đây:

$$\begin{aligned}\left|f_j^{(\nu)}\right|^p &\cong \left|f_j^{(\nu-1)}\right|^p+p\left|f_j^{(\nu-1)}\right|^{p-2}f_j^{(\nu-1)}(f_j^{(\nu)}-f_j^{(\nu-1)})\\ &=p\left|f_j^{(\nu-1)}\right|^{p-2}f_j^{(\nu-1)}f_j^{(\nu)}-(p-1)\left|f_j^{(\nu-1)}\right|^p\end{aligned} \tag{6.5}$$

ta cụ thể lại thuật giải cấp hai cho hệ (6.1) như sau:

$$\begin{aligned}f_i^{(\nu)}(x)=\varepsilon\sum_{j=1}^{2}a_{ij}\left[p\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-2}f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)f_j^{(\nu)}(r_{ij}x)-(p-1)\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^p\right]\\ +\sum_{j=1}^{2}b_{ij}f_j^{(\nu)}(s_{ij}x)+g_i(x)\end{aligned}$$

$$= \varepsilon\, p\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x) f_j^{(\nu)}(r_{ij}x) + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} f_j^{(\nu)}(s_{ij}x)$$
$$-\varepsilon\,(p-1)\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p} + g_i(x),$$

hay

$$f_i^{(\nu)}(x) = \varepsilon\, p\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x) f_j^{(\nu)}(r_{ij}x) + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} f_j^{(\nu)}(s_{ij}x) \qquad (6.6)$$
$$+ g_i^{(\nu)}(x), \quad x\in\Omega,\ i=1,2, \nu=1,2,...$$

với

$$g_i^{(\nu)}(x) = -\varepsilon\,(p-1)\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p} + g_i(x) \qquad (6.7)$$
$$= -\varepsilon\,(p-1)(Af^{(\nu-1)})_i(x) + g_i(x).$$

Giả sử ở bước lặp ban đầu $f^{(0)} = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)})$ được chọn sao cho $\left\|f^{(0)}\right\|_X \le M$ và giả sử ở bước $\nu-1$ ta tính được $f^{(\nu-1)} = (f_1^{(\nu-1)}, f_2^{(\nu-1)})$ từ thuật giải (6.6) sao cho $\left\|f^{(\nu-1)}\right\|_X \le M$. Khi đó, với mọi $x\in\Omega,\ i=1,2$ ta có

$$\left|f_i^{(\nu)}(x)\right| \le |\varepsilon|\, p\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}| \sum_{j=1}^{2}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-1}\left|f_j^{(\nu)}(r_{ij}x)\right|$$
$$+\max_{1\le j\le 2}|b_{ij}|\sum_{j=1}^{2}\left|f_j^{(\nu)}(s_{ij}x)\right| + \left|g_i^{(\nu)}(x)\right|$$
$$\le |\varepsilon|\, pM^{p-1}\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}| \sum_{j=1}^{2}\left|f_j^{(\nu)}(r_{ij}x)\right| \qquad (6.8)$$
$$+\max_{1\le j\le 2}|b_{ij}|\sum_{j=1}^{2}\left|f_j^{(\nu)}(s_{ij}x)\right| + \left|g_i^{(\nu)}(x)\right|$$
$$\le |\varepsilon|\, pM^{p-1}\max_{1\le j\le 2}|a_{ij}|\, \left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \max_{1\le j\le 2}|b_{ij}|\left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left|g_i^{(\nu)}(x)\right|.$$

Vậy

$$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\|\left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|[b_{ij}]\right\|\left\|f^{(\nu)}\right\|_X + \left\|g^{(\nu)}\right\|_X.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}\left\|g^{(\nu)}\right\|_X &\le |\varepsilon|(p-1)\left\|Af^{(\nu-1)}\right\|_X + \|g\|_X \\ &\le |\varepsilon|(p-1)pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\|\left\|f^{(\nu-1)}\right\|_X + \|g\|_X \\ &\le |\varepsilon|(p-1)pM^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X .\end{aligned}$$

vậy

$$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le \left(|\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| + \left\|[b_{ij}]\right\|\right)\left\|f^{(\nu)}\right\|_X + |\varepsilon|\, p(p-1)M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X . \tag{6.9}$$

hay

$$\left(1 - |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| - \left\|[b_{ij}]\right\|\right)\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le |\varepsilon|\, p(p-1)M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X . \tag{6.10}$$

Chọn $M > 0$ sau đó chọn $\varepsilon \in IR$ (đủ nhỏ) sao cho

$$\begin{aligned}&1 - |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| - \left\|[b_{ij}]\right\| > 0, \\ &\frac{|\varepsilon|\, p(p-1)M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X}{1 - |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| - \left\|[b_{ij}]\right\|} \le M.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Khi đó

$$\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le \frac{|\varepsilon|\, p(p-1)M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X}{1 - |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| - \left\|[b_{ij}]\right\|} \le M.$$

Mà điều kiện chọn thứ hai tương đương với

$$|\varepsilon|\, p(p-1)M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X \le \left(1 - |\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\| - \left\|[b_{ij}]\right\|\right)M$$

hay

$$|\varepsilon|\, p^2 M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X \le (1 - \left\|[b_{ij}]\right\|)M$$

Vậy, ta thành lập các giả thiết sau

(H_3) $\left\|[b_{ij}]\right\| < 1;$

(H_6) Chọn $M > 0$ sao cho $\|g\|_X < (1 - \left\|[b_{ij}]\right\|)M;$

(H_7) Chọn $\varepsilon \in IR$ (đủ nhỏ) sao cho $|\varepsilon|\, p^2 M^{p}\left\|[a_{ij}]\right\| + \|g\|_X \le (1 - \left\|[b_{ij}]\right\|)M.$

Vậy nếu ta chọn bước lặp ban đầu $f^{(0)} = (f_1^{(0)}, f_2^{(0)})$ sao cho $\left\|f^{(0)}\right\|_X \le M$, thì dãy lặp $\{f^{(\nu)}\}$ xác định bởi thuật giải (6.6) thỏa $\left\|f^{(\nu)}\right\|_X \le M \;\; \forall \nu = 1,2,...$

Tiếp theo ta đánh giá $e^{(\nu)} = f - f^{(\nu)}$.

$$
\begin{aligned}
e_i^{(\nu)}(x) = f_i(x) - f_i^{(\nu)}(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\Big[\left|f_j(r_{ij}x)\right|^p - p\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x) f_j^{(\nu)}(r_{ij}x)\Big] \\
+ \varepsilon(p-1)\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^p + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} e_j^{(\nu)}(s_{ij}x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\Big[\left|f_j(r_{ij}x)\right|^p - \left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^p - p\left|f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)[f_j^{(\nu)}(r_{ij}x) - f_j^{(\nu-1)}(r_{ij}x)]\Big] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} e_j^{(\nu)}(s_{ij}x) \\
&= \varepsilon \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\Big[\left|f_j(.)\right|^p - \left|f_j^{(\nu-1)}(.)\right|^p - p\left|f_j^{(\nu-1)}(.)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(.)[f_j^{(\nu)}(.) - f_j^{(\nu-1)}(.)]\Big] \\
&\quad + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} e_j^{(\nu)}(s_{ij}x),
\end{aligned}
$$

ở đây ta bỏ qua $r_{ij}x$ trong các cách viết và ký hiệu $f_j(.)$ hoặc f_j thay cho $f_j(r_{ij}x)$.

Chú ý rằng

$$
\begin{aligned}
\left|f_j\right|^p - \left|f_j^{(\nu-1)}\right|^p &= p\left|f_j^{(\nu-1)}\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(f_j - f_j^{(\nu-1)}) + \frac{1}{2}p(p-1)\left|t_{ij}^{(\nu-1)}\right|^{p-2}\left|f_j - f_j^{(\nu-1)}\right|^2 \\
&= p\left|f_j^{(\nu-1)}\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(f_j - f_j^{(\nu-1)}) + \frac{1}{2}p(p-1)\left|t_{ij}^{(\nu-1)}\right|^{p-2}\left|e_j^{(\nu-1)}\right|^2
\end{aligned}
$$

với $t_{ij}^{(\nu-1)} = f_j^{(\nu-1)} + \theta_{ij}^{(\nu)}(f_j - f_j^{(\nu-1)}),\ 0 < \theta_{ij}^{(\nu)} < 1.$

Do đó

$$
\begin{aligned}
e_i^{(\nu)}(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\Big[p\left|f_j^{(\nu-1)}(.)\right|^{p-2} f_j^{(\nu-1)}(.) e_j^{(\nu)}(.) + \frac{1}{2}p(p-1)\left|t_{ij}^{(\nu-1)}(.)\right|^{p-2}\left|e_j^{(\nu-1)}(.)\right|^2\Big] \\
+ \sum_{j=1}^{2} b_{ij} e_j^{(\nu)}(s_{ij}x).
\end{aligned}
$$

Vậy

$$\left|e_i^{(\nu)}(x)\right| \le |\varepsilon| \max_{1\le j\le 2}\left|a_{ij}\right| pM^{p-1}\left\|e^{(\nu)}\right\|_X + \frac{1}{2}|\varepsilon| \max_{1\le j\le 2}\left|a_{ij}\right| p(p-1)M^{p-2}\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2$$
$$+\max_{1\le j\le 2}\left|b_{ij}\right|\left\|e^{(\nu)}\right\|_X.$$

Suy ra

$$\left(1-\left\|[b_{ij}]\right\|-|\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\|\right)\left\|e^{(\nu)}\right\|_X \le \frac{1}{2}|\varepsilon|\, p(p-1)M^{p-2}\left\|[a_{ij}]\right\|\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2$$

$$\left\|e^{(\nu)}\right\|_X \le \beta_M\left\|e^{(\nu-1)}\right\|_X^2,$$

với

$$\beta_M = \frac{\frac{1}{2}|\varepsilon|\, p(p-1)M^{p-2}\left\|[a_{ij}]\right\|}{1-\left\|[b_{ij}]\right\|-|\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\|}, \quad \beta_M\left\|f^{(0)}-f\right\|_X < 1, \tag{6.12}$$

và khi đó, ta có

$$\left\|f^{(\nu)}-f\right\|_X \le \frac{1}{\beta_M}\left(\beta_M\left\|f^{(0)}-f\right\|_X\right)^{2^\nu}, \ \forall \nu = 1,2,... \tag{6.13}$$

Chọn $f^{(0)}$: Ta xây dựng dãy lặp $\{z^{(\eta)}\} \subset K_M$ xác định bởi

$$z_i^{(\eta)}(x) = \varepsilon\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|z_j^{(\eta-1)}(r_{ij}x)\right|^p + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} z_j^{(\eta)}(s_{ij}x) + g_i(x), \tag{6.14}$$

$x\in\Omega,\ i=1,2,\ \eta=1,2,...,$ trong đó $z^{(0)} = (z_1^{(0)}, z_2^{(0)}) \equiv (0,0).$

Khi đó dãy $\{z^{(\eta)}\}$ hội tụ trong X về nghiệm f của (6.1) và có một đánh giá sai số

$$\left\|f - z^{(\eta)}\right\|_X \le \left\|z^{(0)} - Tz^{(0)}\right\|_X \times \frac{\sigma^\eta}{1-\sigma} \le \frac{M}{1-\sigma}\sigma^\eta, \ \forall \eta = 1,2,... \tag{6.15}$$

với

$$\sigma = \frac{|\varepsilon|\, pM^{p-1}\left\|[a_{ij}]\right\|}{1-\left\|[b_{ij}]\right\|} < 1. \tag{6.16}$$

Từ (6.15), (6.16), ta chọn $\eta_0 \in N$ khá lớn sao cho:

$$\beta_M \left\| f - z^{(\eta_0)} \right\|_X \le \frac{M\beta_M}{1-\sigma} \; \sigma^{\eta_0} < 1. \tag{6.17}$$

Vậy ta chọn $f^{(0)} = z^{(\eta_0)}$.■

6.2. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM

Ta vẫn xét hệ (6.1)

$$f_i(x) = \varepsilon \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \left| f_j(s_{ij}x) \right|^p + \sum_{j=1}^{2} b_{ij} f_j(s_{ij}x) + g_i(x),\ x \in \Omega = [-1,1],\ i = 1,2, \tag{6.1}$$

trong đó a_{ij}, b_{ij}, r_{ij}, s_{ij} là các số thực cho trước thỏa (6.3). Do đó, các hàm $R_{ij}(x) = r_{ij}x$, $S_{ij}(x) = s_{ij}x$, $g_i(x)$ (*độc lập với* ε) thỏa các giả thiết (H_1), (H_2).

A. Khảo sát nghiệm của hệ (6.1) trong trường hợp $\varepsilon = 0$.

Trường hợp $\varepsilon = 0$, hệ (6.1) chính là hệ tuyến tính sau:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{2} b_{ij} f_j(s_{ij}x) + g_i(x), \qquad x \in \Omega = [-1,1],\ i = 1,2. \tag{6.18}$$

A.1. Giả sử $g_i(x)$ là đa thức có bậc nhỏ hơn hay bằng r:

$$g_i(x) = \sum_{\gamma=0}^{r} d_{i\gamma} x^\gamma, \quad i = 1,2. \tag{6.19}$$

Theo một kết quả trong [3], nghiệm của hệ (6.18) cũng là các đa thức. Ta tìm nghiệm của (6.18) theo dạng:

$$f_i(x) = \sum_{\gamma=0}^{r} c_{i\gamma} x^\gamma, \quad i = 1,2. \tag{6.20}$$

Thay $f_i(x)$ vào (6.18) ta thu được $c_{i\gamma}$ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

$$c_{i\gamma} - \sum_{j=1}^{2} b_{ij} s_{ij}^\gamma c_{j\gamma} = d_{i\gamma}, \quad i = 1,2, \ 0 \le \gamma \le r. \tag{6.21}$$

Giải hệ (6.21), ta được:

$$\begin{cases} c_{1\gamma} = \dfrac{(1 - b_{22}s_{22}^\gamma)d_{1\gamma} + b_{12}s_{12}^\gamma d_{2\gamma}}{(1 - b_{11}s_{11}^\gamma)(1 - b_{22}s_{22}^\gamma) - b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma}, \\ c_{2\gamma} = \dfrac{b_{21}s_{21}^\gamma d_{1\gamma} + (1 - b_{11}s_{11}^\gamma)d_{2\gamma}}{(1 - b_{11}s_{11}^\gamma)(1 - b_{22}s_{22}^\gamma) - b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma}, \ 0 \le \gamma \le r. \end{cases} \tag{6.22}$$

A.2. Giả sử $g=(g_1,g_2)\in C^q(\Omega,R^2)$. Gọi $\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\tilde{f}_2)$ là nghiệm đa thức của hệ (6.18) tương ứng với $\tilde{g}=(\tilde{g}_1,\tilde{g}_2)$, trong đó:

$$\tilde{g}_i(x)=\sum_{\gamma=0}^{q-1}\frac{1}{\gamma!}g_i^{(\gamma)}(0)x^\gamma,\ i=1,2. \tag{6.23}$$

Theo kết quả trong [3], cũng đã khẳng định rằng sai lệch giữa hai nghiệm f, $\tilde{f}$ của hệ (6.18) lần lượt, tương ứng với g, $\tilde{g}$, được cho bởi đánh giá:

$$\left\|f-\tilde{f}\right\|_X\le\frac{1}{1-\left\|[b_{ij}]\right\|}\times\frac{1}{q!}\left\|g^{(q)}\right\|_X, \tag{6.24}$$

trong đó

$$\tilde{f}_i(x)=\sum_{\gamma=0}^{q-1}c_{i\gamma}x^\gamma,\quad i=1,2, \tag{6.25}$$

$$\begin{cases} c_{1\gamma}=\dfrac{(1-b_{22}s_{22}^\gamma)\dfrac{1}{\gamma!}g_1^{(\gamma)}(0)+b_{12}s_{12}^\gamma\dfrac{1}{\gamma!}g_2^{(\gamma)}(0)}{(1-b_{11}s_{11}^\gamma)(1-b_{22}s_{22}^\gamma)-b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma}, \\ \\ c_{2\gamma}=\dfrac{b_{21}s_{21}^\gamma\dfrac{1}{\gamma!}g_1^{(\gamma)}(0)+(1-b_{11}s_{11}^\gamma)\dfrac{1}{\gamma!}g_2^{(\gamma)}(0)}{(1-b_{11}s_{11}^\gamma)(1-b_{22}s_{22}^\gamma)-b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma},\ 0\le\gamma\le q-1. \end{cases} \tag{6.26}$$

A.3. Ta xét một ví dụ với hàm $g=(g_1,g_2)$ cụ thể như sau:

$$g_i(x)=\frac{1}{1-\dfrac{x}{10+i}}=\frac{10+i}{10+i-x},\ x\in\Omega=[-1,1],\ i=1,2. \tag{6.27}$$

Ta viết lại $g_i(x)$ như sau:

$$g_i(x)=\frac{1}{1-\dfrac{x}{10+i}}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{x}{10+i}\right)^j=\sum_{j=0}^{q-1}\left(\frac{x}{10+i}\right)^j+\sum_{j=q}^{\infty}\left(\frac{x}{10+i}\right)^j. \tag{6.28}$$

Đặt

$$P_i^{[q]}(x)=\sum_{j=0}^{q-1}\left(\frac{x}{10+i}\right)^j=\sum_{\gamma=0}^{q-1}\frac{1}{(10+i)^\gamma}x^\gamma=\sum_{\gamma=0}^{q-1}\frac{1}{\gamma!}g_i^{(\gamma)}(0)x^\gamma,\ i=1,2. \tag{6.29}$$

Ta có

$$\left|g_i(x)-P_i^{[q]}(x)\right| = \left|\sum_{j=q}^{\infty}\left(\frac{x}{10+i}\right)^j\right| \le \sum_{j=q}^{\infty}\frac{|x|^j}{(10+i)^j} \le \sum_{j=q}^{\infty}\frac{1}{(10+i)^j}$$
$$= \frac{1}{(9+i)(10+i)^{q-1}}, \quad \forall x\in[-1,1]. \tag{6.30}$$

Do đó

$$\left\|g-P^{[q]}\right\|_X = \sup_{x\in\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left|g_i(x)-P_i^{[q]}(x)\right|$$
$$\le \frac{1}{10.11^{q-1}}+\frac{1}{11.12^{q-1}} \le \frac{1}{11^{q-1}} \to 0 \text{ khi } q\to+\infty. \tag{6.31}$$

Ta gọi $\tilde{f}^{[q]}=(\tilde{f}_1^{[q]},\tilde{f}_2^{[q]})$ là nghiệm đa thức của hệ (6.18) tương ứng với $g=P^{[q]}=(P_1^{[q]},P_2^{[q]})$. Vậy:

$$\tilde{f}^{[q]}=(\tilde{f}_1^{[q]},\tilde{f}_2^{[q]}), \qquad \tilde{f}_i(x)=\sum_{\gamma=0}^{q-1}c_{i\gamma}x^{\gamma}, \quad i=1,2, \tag{6.32}$$

trong đó, các hệ số $(c_{1\gamma},c_{2\gamma})$ được tính theo công thức (6.26) với

$$g_i^{(\gamma)}(0)=\frac{\gamma!}{(10+i)^{\gamma}}, \quad 0\le\gamma\le q-1, \ i=1,2, \tag{6.33}$$

tức là

$$\begin{cases} c_{1\gamma} = \dfrac{\dfrac{(1-b_{22}s_{22}^{\gamma})}{11^{\gamma}}+\dfrac{b_{12}s_{12}^{\gamma}}{12^{\gamma}}}{(1-b_{11}s_{11}^{\gamma})(1-b_{22}s_{22}^{\gamma})-b_{12}b_{21}s_{12}^{\gamma}s_{21}^{\gamma}}, \\ c_{2\gamma} = \dfrac{\dfrac{b_{21}s_{21}^{\gamma}}{11^{\gamma}}+\dfrac{(1-b_{11}s_{11}^{\gamma})}{12^{\gamma}}}{(1-b_{11}s_{11}^{\gamma})(1-b_{22}s_{22}^{\gamma})-b_{12}b_{21}s_{12}^{\gamma}s_{21}^{\gamma}}, \quad 0\le\gamma\le q-1. \end{cases} \tag{6.34}$$

Mặt khác, từ các hệ $f=Bf+g$, $\tilde{f}^{[q]}=B\tilde{f}^{[q]}+P^{[q]}$, ta suy ra rằng:

$$f-\tilde{f}^{[q]}=B(f-\tilde{f}^{[q]})+g-P^{[q]}.$$

$$\left\|f-\tilde{f}^{[q]}\right\|_X \le \left\|B(f-\tilde{f}^{[q]})\right\|_X+\left\|g-P^{[q]}\right\|_X \le \|B\|\left\|f-\tilde{f}^{[q]}\right\|_X+\left\|g-P^{[q]}\right\|_X$$
$$\le \left\|[b_{ij}]\right\|\left\|f-\tilde{f}^{[q]}\right\|_X+\left\|g-P^{[q]}\right\|_X. \tag{6.35}$$

Suy ra:

$$\left\| f - \widetilde{f}^{[q]} \right\|_X \leq \frac{1}{1 - \left\| [b_{ij}] \right\|} \left\| g - P^{[q]} \right\|_X \leq \frac{11^{1-q}}{1 - \left\| [b_{ij}] \right\|} \to 0, \tag{6.36}$$

khi $q \to +\infty$, do (6.31).■

B. Khai triển tiệm cận nghiệm của hệ (6.1) theo ε.

Trong phần nầy chúng ta sẽ sử dụng các công thức (5.1)-(5.5) trong chương 5 để xác các thành phần trong khai triển tiệm cận. Ta giả sử rằng $p = 2$, và a_{ij}, b_{ij}, r_{ij}, s_{ij} là các số thực cho trước thỏa (6.3). Các hàm tương ứng $R_{ij}(x) = r_{ij}x$, $S_{ij}(x) = s_{ij}x$, $g_i(x)$ (độc lập với ε) cũng thỏa các giả thiết $(H_1), (H_2)$.
Giả sử $g_i(x)$ là đa thức bậc r cho trước độc lập với ε như sau:

$$g_i(x) = \sum_{\gamma=0}^{r} d_{i\gamma} x^{\gamma}, \quad i = 1,2. \tag{6.37}$$

Áp dụng công thức (6.19), (6.20), (6.22), nghiệm của hệ (6.1) ứng với $\varepsilon = 0$ (tức là hệ (6.18)) cũng là các đa thức: $f^{[0]} = (f_1^{[0]}, f_2^{[0]}) = L^{-1}g$, với

$$f_i^{[0]}(x) = \sum_{\gamma=0}^{r} c_{i\gamma} x^{\gamma}, \quad i = 1,2, \tag{6.38}$$

trong đó $(c_{1\gamma}, c_{2\gamma})$ cho bởi

$$\begin{cases} c_{1\gamma} = \dfrac{(1 - b_{22}s_{22}^{\gamma})d_{1\gamma} + b_{12}s_{12}^{\gamma}d_{2\gamma}}{(1 - b_{11}s_{11}^{\gamma})(1 - b_{22}s_{22}^{\gamma}) - b_{12}b_{21}s_{12}^{\gamma}s_{21}^{\gamma}}, \\ c_{2\gamma} = \dfrac{b_{21}s_{21}^{|\gamma|}d_{1\gamma} + (1 - b_{11}s_{11}^{|\gamma|})d_{2\gamma}}{(1 - b_{11}s_{11}^{\gamma})(1 - b_{22}s_{22}^{\gamma}) - b_{12}b_{21}s_{12}^{\gamma}s_{21}^{\gamma}}, \quad 0 \leq \gamma \leq r. \end{cases} \tag{6.39}$$

Gọi $f^{[1]}$ là nghiệm của hệ (6.18) ứng với $g = Af^{[0]}$, tức là

$$f^{[1]} = (f_1^{[1]}, f_2^{[1]}) = L^{-1}Af^{[0]}, \tag{6.40}$$

mà

$$Af^{[0]} = ((Af^{[0]})_1, (Af^{[0]})_2), \tag{6.41}$$

với

$$(Af^{[0]})_i(x) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} \left| f_j^{[0]}(r_{ij}x) \right|^2. \tag{6.42}$$

Ta có công thức

$$\left(\sum_{\gamma=0}^{r} a_\gamma x^\gamma\right)^2 = a_0^2 + 2\sum_{\gamma=1}^{2r}\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma-1}(\gamma-\nu)a_\nu a_{\gamma-\nu}x^\gamma$$

$$\left|f_j^{[0]}(r_{ij}x)\right|^2 = \left(\sum_{\gamma=0}^{r} c_{j\gamma}r_{ij}{}^{\gamma}x^\gamma\right)^2 = c_{j0}^2 + 2\sum_{\gamma=1}^{2r}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma-1}(\gamma-\nu)c_{j\nu}c_{j\gamma-\nu}r_{ij}^\gamma\right)x^\gamma. \qquad (6.43)$$

$$\begin{aligned}(Af^{[0]})_i(x) &= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left|f_j^{[0]}(r_{ij}x)\right|^2 = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(\sum_{\gamma=0}^{r} c_{j\gamma}r_{ij}{}^{\gamma}x^\gamma\right)^2\\ &= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}c_{j0}^2 + 2\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\sum_{\gamma=1}^{2r}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma-1}(\gamma-\nu)c_{j\nu}c_{j\gamma-\nu}r_{ij}^\gamma\right)x^\gamma\\ &= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}c_{j0}^2 + 2\sum_{\gamma=1}^{2r}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma-1}(\gamma-\nu)c_{j\nu}c_{j\gamma-\nu}r_{ij}^\gamma\right)x^\gamma \equiv \sum_{\gamma=0}^{2r} d_{i\gamma}^{(1)}x^\gamma,\end{aligned}$$

trong đó, ta đặt

$$d_{i0}^{(1)} = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}c_{j0}^2, \qquad d_{i\gamma}^{(1)} = 2\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(\frac{1}{\gamma}\sum_{\nu=0}^{\gamma-1}(\gamma-\nu)c_{j\nu}c_{j\gamma-\nu}r_{ij}^\gamma\right),\ 1\le\gamma\le 2r. \quad (6.44)$$

Từ (6.20) ta có biểu thức của $f^{[1]} = (f_1^{[1]}, f_2^{[1]})$ cho bởi công thức

$$f_i^{[1]}(x) = \sum_{\gamma=0}^{2r} c_{i\gamma}^{(1)}x^\gamma, \qquad (6.45)$$

trong đó $(c_{1\gamma}^{(1)}, c_{2\gamma}^{(1)})$ cho bởi công thức (6.22), với $(c_{1\gamma}, c_{2\gamma})$ và $(d_{1\gamma}, d_{2\gamma})$ lần lượt thay bởi $(c_{1\gamma}^{(1)}, c_{2\gamma}^{(1)})$ và $(d_{1\gamma}^{(1)}, d_{2\gamma}^{(1)})$, với $0\le\gamma\le 2r$, như sau:

$$\begin{cases} c_{1\gamma}^{(1)} = \dfrac{(1-b_{22}s_{22}^\gamma)d_{1\gamma}^{(1)} + b_{12}s_{12}^\gamma d_{2\gamma}^{(1)}}{(1-b_{11}s_{11}^\gamma)(1-b_{22}s_{22}^\gamma) - b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma},\\[2ex] c_{2\gamma}^{(1)} = \dfrac{b_{21}s_{21}^\gamma d_{1\gamma}^{(1)} + (1-b_{11}s_{11}^\gamma)d_{2\gamma}^{(1)}}{(1-b_{11}s_{11}^\gamma)(1-b_{22}s_{22}^\gamma) - b_{12}b_{21}s_{12}^\gamma s_{21}^\gamma}, \quad 0\le\gamma\le 2r.\end{cases} \qquad (6.46)$$

Theo kết quả của định lý 5.2, chương 5, ta có một đánh giá một khai triển tiệm cận cấp 2 theo ε đủ nhỏ như sau:

$$\left| f_i(x) - f_i^{[0]}(x) - \varepsilon f_i^{[1]}(x) \right|$$
$$= \left| f_i(x) - \sum_{\gamma=0}^{r} c_{i\gamma} x^{\gamma} - \varepsilon \sum_{\gamma=0}^{2r} c_{i\gamma}^{(1)} x^{\gamma} \right| \le 2C \left\| L^{-1} \right\| \varepsilon^2, \qquad (6.47)$$

với mọi $x \in \Omega$, $i = 1,2$ và với ε đủ nhỏ, $C > 0$ là hằng số độc lập với x và ε.■

PHẦN KẾT LUẬN

Luận văn đề cập tới việc khảo sát sự tồn tại duy nhất nghiệm, thuật giải lặp cấp hai, khai triển tiệm cận của nghiệm theo một tham số bé cho hệ phương trình hàm phi tuyến trong $\Omega = [a,b]$ hay Ω là khoảng không bị chặn trong IR. Nội dung chính của luận văn nằm ở các chương 3, 4, 5 và 6.

Trong chương 3, dựa vào định lý điểm bất động Banach, chúng tôi chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm của hệ phương trình hàm trong một quả cầu đóng trong $C(\Omega; IR^n)$. Kết quả thu được ở đây chứa đựng kết quả của Wu, Xuan, Zhu đã khảo sát trong trường hợp $\Omega = [-b,b]$, $m = n = 2$, $a_{ijk} = 0$ và S_{ijk} là các nhị thức bậc nhất, như là một trường hợp riêng.

Trong chương 4, chúng tôi thiết lập thuật giải cấp hai của hệ phương trình hàm và chỉ ra một điều kiện đủ để thuật giải hội tụ.

Chương 5 là phần nghiên cứu hệ phương trình hàm bị nhiễu bởi một tham số bé ε. Khi đó chúng tôi cho một khai triển tiệm cận nghiệm của hệ nầy đến cấp $N+1$ theo ε, với ε đủ nhỏ.

Trong chương 6, chúng tôi nghiên cứu một số ví dụ hệ phương trình hàm cụ thể với $\Phi(y) = |y|^p$, $p \geq 2$, ở đó chúng tôi sẽ khảo sát một thuật giải hội tụ cấp hai và chỉ ra các thành phần trong khai triển tiệm cận đến cấp hai cho hệ.

Các kết quả trình bày trong các chương 3, 4, 5, 6 chứa đựng kết quả của các tác giả trước đó đã khảo sát trong trường hợp $\Phi(y) = y^2$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] *Phạm Hồng Danh, Huỳnh Thị Hoàng Dung, Nguyễn Thành Long*, Xấp xỉ đa thức của nghiệm một hệ tuyến tính các phương trình tích phân-hàm, *Hội Nghị Khoa học, Khoa Toán-Tin học, Đại học Sư Phạm Tp.HCM*, 21/12/2002.
[2] *Nguyễn Kim Khôi, Nguyễn Hội Nghĩa*, Giải số của hệ phương trình hàm, *Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ*, *Vol.* **3**, No. 7&8, (2000), 25-31.
[3] *Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi, Đinh Văn Ruy*, On a system of functional equations, Demonstration Math. **31** (1998), 313-324.
[4] *Nguyễn Thành Long, Nguyễn Hội Nghĩa*, On a system of functional equations in a multi-dimensional domain, Z. Anal. Anw. **19** (2000), 1017- 1034.
[5] *Nguyễn Thành Long, Phạm Hồng Danh, Nguyễn Kim Khôi*, Xấp xỉ nghiệm của một hệ phương trình tích phân bởi một dãy các đa thức hội tụ đều, *Tạp chí Khoa học Đại học Sư Phạm Tp. HCM, tập* **30**, No.2 (2002), 36-43.
[6] *Nguyen Thanh Long, Nguyen Hoi Nghia, Tran Ngoc Diem*, Asymptotic expansion of the solution for system of functional equations, *Aequationes Mathematicae*, (2003) (Submitted).
[7] *Nguyen Thanh Long*, Solution approximation of a system of integral equations by a uniformly convergent polynomials sequence, *Demonstratio Math.* **37** (2004), No.1, 123 -132.
[8] *Nguyen Thanh Long*, Linear approximation and asymptotic expansion associated with the system of functional equations, *Demonstratio Math.* **37** (2004), No.2, 349 - 362.
[9] *Nguyễn Hội Nghĩa, Nguyễn Kim Khôi*, Về một hệ phương trình hàm tuyến tính, *Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ*, Vol. **3**, No. 7&8, (2000), 18-24.
[10] *Nguyễn Hội Nghĩa*, Xấp xỉ nghiệm của hệ phương trình hàm trong miền hai chiều, *Tạp Chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ*, Vol. **5**, No. 1&2, (2002), 56-65.
[11] *Lê Thu Vân*, Xấp xỉ và khai triển tiệm cận nghiệm của hệ phương trình hàm, *Luận văn Thạc sỹ Toán học*, (2001), *Trường Đại học KHTNTp.HCM.*, 41 trang.
[12] *C.Q. Wu, Q.W. Xuan, D.Y. Zhu*, The system of the functional equations and the fourth problem of the hyperbolic system, *SEA. Bull. Math.* **15** (1991), 109 -115.