



# Chương IV

## Mô hình hồi qui bội

**QTKD / ĐHCN tp HCM**

## Mô hình hồi qui bội (HQ đa biến)

1. Mô hình hồi qui 3 biến
2. Mô hình hồi qui  $k$  biến
3. Một số dạng hàm

## I.1. Hàm hồi qui tổng thể (PRF) 3 biến

■ Dạng xác định:  $E(Y/X_2, X_3) = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3$

■ Dạng ngẫu nhiên:  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + u_i$

■  $\beta_1$  – Hệ số tự do (hệ số chặn).

$\beta_1 = Y$  khi  $X_2 = X_3 = 0$ . Cần kết hợp thực tế để giải thích ý nghĩa cho phù hợp.

■  $\beta_2; \beta_3$  – Hệ số hồi qui riêng (hệ số góc riêng phần) là ảnh hưởng riêng của từng biến ( $X_2; X_3$ ) lên  $Y$  khi các biến còn lại không đổi

## I.2. Hàm hồi qui mẫu (SRF) 3 biến:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot X_{2i} + \hat{\beta}_3 \cdot X_{3i}$$

$$Y_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \cdot X_{2i} + \hat{\beta}_3 \cdot X_{3i} + \hat{u}_i$$

Ví dụ: Hàm hồi qui mẫu như sau:

$$\hat{Y}_i = 328,1383 + 4,65 X_{2i} + 2,56 X_{3i}$$

### Ý nghĩa kinh tế các HSHQ

- (1) /  $\beta_1 = 328,1383 = Y_{\min}$  (khi  $X_2 = X_3 = 0$ ). Nghĩa là, khi không quảng cáo và không chào hàng, **doanh số bán hàng bình quân là 328, 1383 triệu đồng tháng**
- (2) /  $\beta_2 = 4,65 > 0 \rightarrow$  Nếu chi phí chào hàng tăng (giảm) 1 triệu đồng / tháng, **mà các yếu tố khác không đổi**, doanh số bán hàng sẽ tăng (giảm) 4,65 triệu đồng / tháng
- (3) /  $\beta_3 = 2,56 > 0 \rightarrow$  Nếu chi phí quảng cáo tăng (giảm) 1 triệu đồng / tháng, **mà các yếu tố khác không đổi**, doanh số bán hàng sẽ tăng (giảm) 2, 56 triệu đồng / tháng

## I.3. Ước lượng các tham số

1. Phương pháp bình phương nhỏ nhất OLS
2. Công thức

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 - \hat{\beta}_3 \bar{X}_3$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(\sum y_i x_{2i})(\sum x_{3i}^2) - (\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{(\sum y_i x_{3i})(\sum x_{2i}^2) - (\sum y_i x_{2i})(\sum x_{2i} x_{3i})}{(\sum x_{2i}^2)(\sum x_{3i}^2) - (\sum x_{2i} x_{3i})^2}$$

Trong đó:  $y_i = Y_i - \bar{Y}$  ;  $x_{ti} = X_{ti} - \bar{X}_t$

$$(t = 2; 3)$$

# Sử dụng máy tính

**(1). Bước 1:** Nhập  $X_2$ ,  $Y \rightarrow$  Tính các đại lượng trung gian như:

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2$$

$$\sum y_i x_{2i} = \sum Y_i X_{2i} - n \bar{Y} \bar{X}_2$$

$$\Rightarrow Y_{X_2} = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\sum x_{2i}^2 = \sum X_{2i}^2 - n(\bar{X}_2)^2$$

**(2). Bước 2:** Nhập  $X_3$ ,  $Y \rightarrow$  Tính các đại lượng trung gian như:

$$\sum x_{3i}^2 = \sum X_{3i}^2 - n(\bar{X}_3)^2$$

$$\sum y_i x_{3i} = \sum Y_i X_{3i} - n \bar{Y} \bar{X}_3 \Rightarrow Y_{X_3} = \beta_1 + \beta_2 X$$

**(3). Bước 3:** Nhập  $X_3$ ,  $X_2$

$$\Rightarrow \sum x_{2i} x_{3i} = \sum X_{2i} X_{3i} - n \bar{X}_2 \bar{X}_3$$

**(4). Bước 4:** Tính các tham số hồi quy

$\rightarrow$  Phương trình hồi quy

## Các giả thiết OLS

1. Giá trị trung bình  $U_i = 0 : E(U_i / X_{2i}; X_{3i}) = 0$
2. Phương sai các  $U_i$  không đổi:  $Var(U_i) = \sigma^2$
3. Không có tự tương quan giữa các  $U_i$   
$$Cov(U_i; U_j) = 0 \quad \forall i, j$$
4. Không có quan hệ tuyến tính rõ ràng giữa 2 biến giải thích
5.  $U_i \sim N(0, \sigma^2)$



## I.4. Phương sai các HSHQ

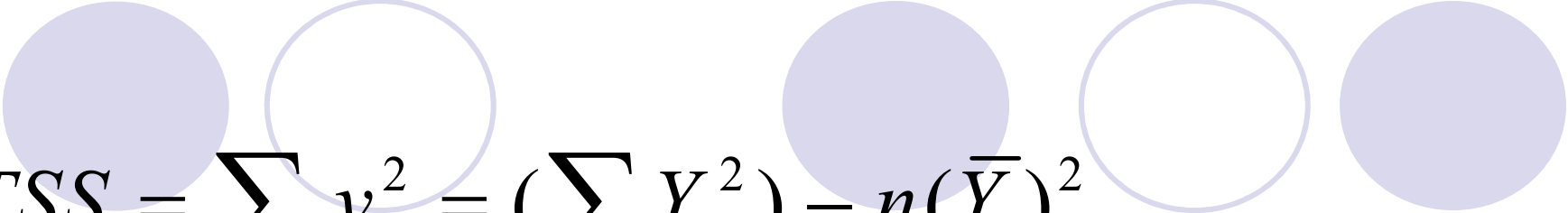
$$Var(\hat{\beta}_1) = \left[ \frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_2^2 \sum x_{3i}^2 + \bar{X}_3^2 \sum x_{2i}^2 - 2\bar{X}_2\bar{X}_3 \sum x_{2i}x_{3i}}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \right] \cdot \sigma^2$$

$$Var(\hat{\beta}_2) = \frac{\sum x_{3i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \sigma^2$$

$$Var(\hat{\beta}_3) = \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{2i}^2 \sum x_{3i}^2 - (\sum x_{2i}x_{3i})^2} \sigma^2$$

Trong đó :  $\sigma^2$  – phương sai của  $U_i$  nhưng chưa biết,

$$\text{thay bằng } \hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-3}$$


$$TSS = \sum y_i^2 = (\sum Y_i^2) - n(\bar{Y})^2$$

$$ESS = \hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}$$

$$RSS = TSS - ESS$$

## I.5. Hệ số xác định hồi quy bội

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} ; \quad \bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2 / (n - k)}{\sum y_i^2 / (n - 1)}$$

( $\bar{R}^2$  :  $R^2$  có hiệu chỉnh – Adjusted R squared)

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k} \quad (k : \text{số hệ số hồi quy})$$

+ *Tính chất* : \*  $k > 1$  :  $\bar{R}^2 \leq R^2 \leq 1$

\*  $R^2$  luôn dương ;  $\bar{R}^2$  có thể âm

## SO SÁNH HÀM

⊕ Phải cùng cỡ mẫu (n)

⊕ Nếu cùng số biến độc lập thì dùng  $R^2$

Nếu khác số biến độc lập  $\Rightarrow$  phải sử dụng  $\bar{R}^2$

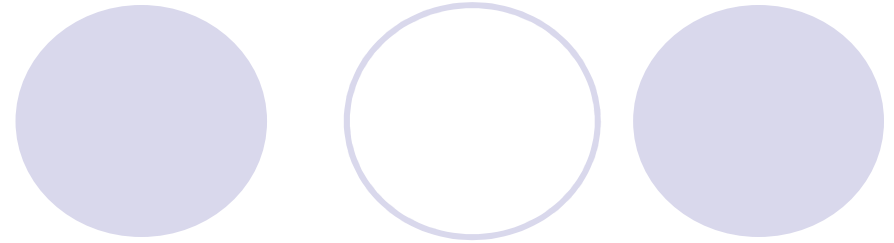
⊕ Biến Y phải cùng dạng

⊕ Các biến độc lập có thể khác dạng

VD:  $\ln Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_{3i} X_{3i}$

không so sánh được với :

$$Y_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_{3i} X_{3i}$$



Khi nào thêm biến độc lập  $X_k$  vào mô hình ?

{ \*  $\bar{R}^2$  tăng  
\* HSHQ (của  $X_k$ )  $\neq 0$  có ý nghĩa thống kê  
(Kiểm định HSHQ của biến  $X_k$ )

$\Rightarrow$  Biến  $X_k$  cần thiết đưa vào mô hình

## 1.6. Khoảng tin cậy các HSHQ

$$KTC\beta_j = \hat{\beta}_j \pm t_{\alpha/2; (n-3)} \cdot se(\hat{\beta}_j)$$

Ý nghĩa khoảng tin cậy:

Ví dụ: KTC  $\beta_2 = (15; 20)$  với  $X_2$ : giá vé xe bus (ngàn đồng/vé)

$X_3$ : khu vực

$Y$ : Lượng người đi xe bus (tr. người)

→ Nếu giá vé tăng 1 ngàn đồng/vé, trong

## 1.7. Kiểm định HSHQ

- $H_0: \beta_j = 0$

- **Bước 1:** 
$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_0}{se(\hat{\beta}_j)} \quad j = 1; 2; 3$$

- **Bước 2**  
*tra bang  $t_{\alpha/2; (n-3)}$*

- **Bước 3**

$$\begin{aligned} * |t_0| > t_{\alpha/2; (n-3)} &\Rightarrow \text{bác bỏ } H_0 \\ &\Rightarrow \beta_j \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow X_j$  thực sự có ảnh hưởng đến  $Y_i$

$$\begin{aligned} * |t_0| \leq t_{\alpha/2; (n-3)} &\Rightarrow \text{chấp nhận } H_0 \\ &\Rightarrow \beta_j = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow X_j$  không có ảnh hưởng đến  $Y_i$

### Ví dụ C.4

$$* t_0 = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_0}{se(\hat{\beta}_j)}$$

$$= \frac{4,64951}{0,469148} = 9,911$$

$$* t_{0,025; (9)} = 2,262$$

$$* \text{ Vì } t_0 > t_{0,025; (9)} \Rightarrow \text{bác bỏ } H_0$$

$\Rightarrow$  chi phí quảng cáo thực sự có ảnh hưởng đến doanh số bán hàng

## 1.8. Kiểm định giả thiết đồng thời

### Các bước

$$* H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0 \approx H_0 : R^2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0 \text{ hoặc } \beta_3 \neq 0$$

$$* F_0 = \frac{R^2(n-3)}{2(1-R^2)}$$

$$* F_{\alpha(2;n-3)}$$

$$* F_0 > F_{\alpha(2;n-3)} \Rightarrow \text{bác bỏ } H_0$$

$\Rightarrow$  các biến  $X_k$  ( $k=2;3$ ) không đồng thời bằng 0  $\Rightarrow X_k$  thực sự có ảnh hưởng lên  $y$

$$* F_0 \leq F_{\alpha(2;n-3)} \Rightarrow \text{chấp nhận } H_0 \Rightarrow \text{các biến}$$

$X_k$  ( $k=2;3$ ) cũng bằng 0  $\Rightarrow X_k$  không có ảnh hưởng lên  $y$

### Ví dụ C.4.1

$$* F_0 = \frac{0,9677(12-3)}{2(1-0,9677)} = 134,79$$

(với  $R^2 = 0,9677$ )

$$* \text{Với } \alpha = 1\% \Rightarrow F_{0,01;(2;9)} = 8,02$$

$$* F_0 > F_{0,01} \Rightarrow \text{bác bỏ } H_0$$

$\Rightarrow$  chi phí chào hàng ( $X_2$ ) & chi phí quảng cáo ( $X_3$ ) đều có ảnh hưởng lên doanh số bán



## II. 1. Hồi qui tuyến tính k biến

$$* Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + U_i$$

\* *Có n quan sát :*

$$Y_1 = \beta_1 + \beta_2 X_{21} + \beta_3 X_{31} + \dots + \beta_k X_{k1} + U_1$$

$$Y_2 = \beta_1 + \beta_2 X_{22} + \beta_3 X_{32} + \dots + \beta_k X_{k2} + U_{i2}$$

.....

$$Y_n = \beta_1 + \beta_2 X_{2n} + \beta_3 X_{3n} + \dots + \beta_k X_{kn} + U_{in}$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} & \dots & X_{k1} \\ 1 & X_{22} & X_{32} & \dots & X_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} & \dots & X_{kn} \end{bmatrix}$$

$$Y = \beta \cdot X + U$$

## 2.2 Ước lượng các tham số hồi qui

- Ta có:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

$$\text{Với } X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum X_{2i} & \sum X_{3i} \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \sum X_{2i} X_{3i} \dots & \sum X_{2i} X_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{ki} X_{2i} & \sum X_{ki} X_{3i} \dots & \sum X_{ki}^2 \end{bmatrix}$$

$X^T$  : ma trận  $X$  chuyển vị

$(X^T X)^{-1}$  : ma trận nghịch đảo của  $X^T X$

## Ví dụ C.4.2: ước lượng hàm HQ 3 biến

$Y_i$	20	18	19	18	17	17	16	15	13	12
$X_{2i}$	8	7	8	8	6	6	5	5	4	3
$X_{3i}$	2	3	4	4	5	5	6	7	8	8

Ta có  $\sum Y_i = 165$  ;  $\sum X_{2i} = 60$  ;  $\sum X_{3i} = 52$  ;  $\sum Y_i^2 = 2781$  ;  $\sum X_{2i}^2 = 308$  ;  $\sum X_{2i}X_{3i} = 282$  ;  $\sum Y_iX_{2i} = 1029$  ;  $\sum Y_iX_{3i} = 813$

$$[X^T X]^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 60 & 52 \\ 60 & 388 & 282 \\ 52 & 282 & 308 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1528} \begin{bmatrix} 39980 & -3816 & -3256 \\ -3816 & 376 & 300 \\ -3256 & 300 & 280 \end{bmatrix}$$

$$\beta = \frac{1}{1528} \begin{bmatrix} 39980 & -3816 & -3256 \\ -3816 & 376 & 300 \\ -3256 & 300 & 280 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 165 \\ 1029 \\ 813 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29908/1528 \\ 1164/1528 \\ -900/1528 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hay: } \beta = \begin{bmatrix} 14,99215 \\ 0,76178 \\ -0,58901 \end{bmatrix} \Rightarrow Y_i = 14,99215 + 0,76178X_{2i} - 0,58901X_{3i}$$

## 2.3 Hệ số xác định hồi qui bội

- Hệ số xác định hồi qui bội có thể được tính bằng 1 trong 2 công thức:

$$1 / R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

$$\text{Trong đó : } TSS = Y^T . Y - n(\bar{Y})^2 \quad ESS = \beta^T . X^T . Y - n(\bar{Y})^2$$

$$2 / R^2 = \frac{\beta_2 \sum y_i x_{2i} + \beta_3 \sum y_i x_{3i} + \dots + \beta_k \sum y_i x_{ki}}{\sum y_i^2}$$

## 2.4. Ma trận tương quan

- Xét mô hình HQ bội:  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \dots + \beta_k X_{ki} + U_i$
- $R_{tj}$  là hệ số tương quan giữa biến thứ  $t$  và biến thứ  $j$ . Nếu  $t=1 \rightarrow R_{1j}$  là hệ số tương quan giữa biến  $Y$  và biến  $X_j$

$$R_{1j} = \frac{\sum y_i x_{ij}}{\sqrt{\sum y_i^2 \sum x_{ji}^2}} ; R_{tj} = \frac{\sum x_{ti} x_{ij}}{\sqrt{\sum x_{ti}^2 \sum x_{ji}^2}}$$

$$\text{Trong đó : } x_{ji} = X_{ji} - \bar{X}_j ; R_{tj} = R_{jt} ; R_{jj} = 1$$

*Ma trận tương quan có dạng :*

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & R_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ R_{21} & 1 & \dots & R_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{k1} & R_{k2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

## 2.5 Ma trận hiệp phương sai

- Tính  $\text{Var}(\beta_j)$  và  $\text{Cov}(\beta_j, \beta_j)$  vì chúng có liên quan đến nhiều suy luận thống kê, ma trận hiệp phương sai của  $\beta$ .

$$\text{Cov}(\beta) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\beta_1) & \text{Cov}(\beta_1, \beta_2) & \dots & \text{Cov}(\beta_1, \beta_k) \\ \text{Cov}(\beta_2, \beta_1) & \text{Var}(\beta_2) & \text{Cov}(\beta_2, \beta_k) & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Cov}(\beta_k, \beta_1) & \text{Cov}(\beta_k, \beta_2) & \text{Var}(\beta_k) & \end{bmatrix}$$

$$\text{Cov}(\beta) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

Trong đó  $(X^T X)^{-1}$  : ma trận nghịch đảo của  $(X^T X)$

$\sigma^2$  thay bằng ước lượng không chệch của nó là :

$$\sigma^2 = \frac{RSS}{n - k} = \frac{\sum e_i^2}{n - k}$$

## Ví dụ C.4.2: tính ma trận hiệp phương sai

- Đã tính được  $(X^T X)^{-1}$ ; ta tính  $\hat{\sigma}^2$

$$TSS = Y^T Y - n(\bar{Y})^2 = \sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2 = 2781 - 10(16,5)^2 = 58,5$$

$$ESS = \hat{\beta}^T (X^T Y) - n(\bar{Y})^2 = (14,99215 \quad 0,76178 \quad -0,58901) \begin{bmatrix} 165 \\ 1029 \\ 813 \end{bmatrix} - 10(16,5)^2 = 56,211$$

$$\Rightarrow RSS = 58,5 - 56,211 = 2,289$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-3} = \frac{2,289}{7} = 0,327$$

$$Cov(\hat{\beta}) = \frac{0,327}{1528} \begin{bmatrix} 39980 & -3816 & -3256 \\ -3816 & 376 & 300 \\ -3256 & 300 & 280 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Cov(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} 8,55593 & -0,81664 & -0,6968 \\ -0,81664 & 0,080466 & 0,0642 \\ -0,6968 & 0,0642 & 0,05992 \end{bmatrix}$$

**2.6. Kiểm định giả thiết  $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = \dots = \beta_k = 0$  ( $R^2 = 0$ )**  
 **$H_1$  : không phải tất cả HSHQ riêng đồng thời bằng 0**

\* Bước 1 :  $F_0 = \frac{R^2(n-k)}{(1-R^2)(k-1)}$

\* Bước 2 : Tra bảng phân phối Fisher, bậc tự do  $n_1 = (k-1)$

và  $n_2 = (n-k)$

$\Rightarrow F_{\alpha;(k-1),(n-k)}$  Trong đó :  $n$  – số quan sát ;  $k$  – số biến trong mô hình,  
kể cả biến phụ thuộc

$F_{\alpha;(k-1),(n-k)}$  thỏa mãn điều kiện :  $P[F_0 > F_{\alpha;(k-1),(n-k)}] = \alpha$

\* Bước 3 : Nếu  $F > F_{\alpha;(k-1),(n-k)} \Rightarrow$  bác bỏ  $H_0$

$\Rightarrow$  các hệ số hồi quy không đồng thời bằng 0

– Nếu  $F_0 < F_{\alpha;(k-1),(n-k)} \Rightarrow$  không bác bỏ  $H_0 \Rightarrow$  các HSHQ đồng thời bằng 0

Nghĩa là chấp nhận  $R^2 \neq 0$  có ý nghĩa



## 2.7. Dự báo giá trị trung bình & giá trị cá biệt của Y

• Cho 
$$X^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2^0 \\ X_3^0 \\ \dots \\ X_k^0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{du bao } E(Y / X^0) = \beta_1 + \beta_2 X_2^0 + \dots + \beta_k X_k^0$$

\* Du bao diem (uoc luong diem) cua Y khi  $X = X^0 \Rightarrow \hat{Y}_0 = X^{0T} \hat{\beta}$

$$\Rightarrow \text{Var}(\hat{Y}_0) = X^{0T} \text{Cov}(\hat{\beta}) X^0 = \sigma^2 X^{0T} (X^T X)^{-1} X^0 \text{ vi } \text{Cov}(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

$$\text{Thay } \sigma^2 \text{ bang } \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \text{Var}(\hat{Y}_0) = \hat{\sigma}^2 X^{0T} (X^T X)^{-1} X^0$$

Vay voi do tin cay  $(1 - \alpha)$ , du bao khoang cua  $E(Y / X^0)$ :

$$\left| \hat{Y}_0 - t_{\alpha/2; (n-k)} \cdot SE(\hat{Y}_0) ; \hat{Y}_0 + t_{\alpha/2; (n-k)} \cdot SE(\hat{Y}_0) \right|$$

\* Du bao gia tri ca biet  $\Rightarrow$  tim khoang tin cay cho  $Y_0 \simeq \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2; (n-k)} \cdot SE(Y_0 - \hat{Y}_0)$

$$\text{Trong do : } \text{Var}((Y_0 - \hat{Y}_0)) = \text{Var}(\hat{Y}_0) + \hat{\sigma}^2$$

### III.1. Hàm sản xuất Cobb-Douglas

- Hàm Cobb-Douglas dùng khảo sát sản xuất**

\* Hàm Cobb – Douglas dạng ngẫu nhiên :  $Y = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{U_i}$

Trong đó :  $Y$  – Sản lượng ;  $X_2$  – lương lao động ;  $X_3$  – lương vốn ;  
 $U_i$  – sai số ngẫu nhiên

\* Lấy ln 2 vế :  $\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + U_i$

\* Tổng quát :  $\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + \dots + \beta_k \ln X_{ki} + U_i$

\*  $\beta_2$  – đo co đàn riêng của sản lượng đối với lao động (sản lượng tăng hay giảm bao nhiêu % khi lương lao động tăng hay giảm 1%, các yếu tố khác không đổi)

\*  $\beta_3$  – đo co đàn riêng của sản lượng đối với vốn khi lương lao động không đổi

\* Tổng  $(\beta_2 + \beta_3) \Rightarrow$  đánh giá việc tăng qui mô sản xuất

+  $(\beta_2 + \beta_3) = 1 \Rightarrow$  tăng qui mô sản xuất không hiệu quả

+  $(\beta_2 + \beta_3) < 1 \Rightarrow$  tăng qui mô sản xuất kém hiệu quả

+  $(\beta_2 + \beta_3) > 1 \Rightarrow$  tăng qui mô sản xuất có hiệu quả

### 3.2 Ví dụ C.4.3: Nông nghiệp Đài Loan 1958 – 1972

Y – Tổng sản lượng (tr Đôla Đ.Loan);  $X_2$  – ngày lao động (tr ngày);  $X_3$  – Lượng vốn (tr Đôla Đ.Loan). Hồi qui  $\ln Y$  theo  $\ln X_2$  và  $\ln X_3$

Y	16606.7	17511.3	20171.2	20932.9	20406.0	20831.6	24806.3	26465.8
X2	275.5	274.4	269.7	267.0	267.8	275.0	283.0	300.7
X3	17803.7	18096.8	18271.8	19167.3	19647.6	20803.5	22076.6	23445.2
Y	27403.0	28628.7	29904.5	27508.2	29305.5	29821.5	31535.8	
X2	307.5	303.7	304.7	298.6	295.5	299.0	288.1	
X3	24939.0	26713.7	29957.8	31585.9	33474.5	34821.8	41794.3	

- **$\ln Y_i = -3,33863 + 1,4988 \ln X_{2i} + 0,4899 \ln X_{3i}$   $R^2 = 0,889$ ;  $F=48,07$**
- Đài Loan giai đoạn 1958 – 1972, tăng 1% lượng lao động, trung bình tăng 1,5% sản lượng, giữ lượng vốn không đổi
- Vốn tăng 1%, sản lượng trung bình tăng 0,5%, lượng lao động không đổi
- Tổng  $(\beta_2 + \beta_3) = 1,9887 \rightarrow$  tăng qui mô: có hiệu quả

### 3.3 Các mô hình HQ đa thức

- Dạng tổng quát:  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \dots + \beta_k X_i^k$
- Biến giải thích  $\rightarrow$  lũy thừa khác nhau, bậc của đa thức thường  $\leq 4$  (nếu không, kết quả toán học rất tốt mà không có ý nghĩa kinh tế)
- Thường gặp là hàm bậc 2 (parabol) và hàm bậc 3 (đường cong dạng chữ S)
- X và Y không có quan hệ tuyến tính nhưng **tuyến tính theo tham số  $\rightarrow$  ước lượng bằng phương pháp OLS**

### 3.4. Ví dụ C4.4. Ước lượng hàm tổng chi phí. Sau đây là sản lượng và tổng chi phí 1 loại sản phẩm

SL (Y)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
TCP (X)	193	226	240	244	257	260	274	297	350	420

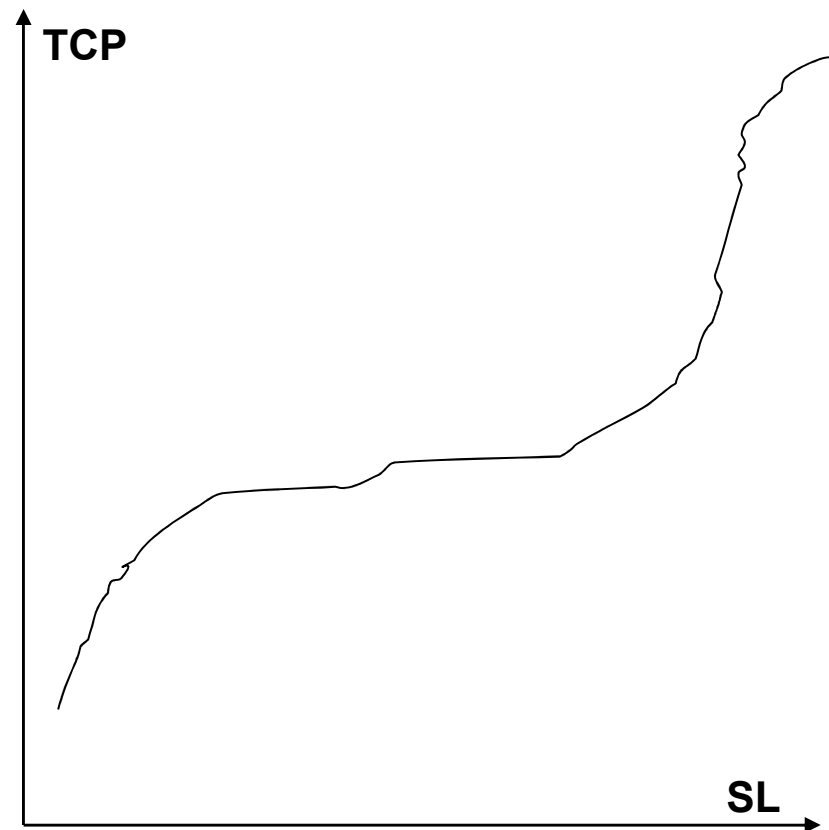
- Biểu đồ phân tán cho ta đường cong (bậc 3) biểu thị quan hệ giữa chi phí và sản lượng → hàm hồi qui bậc 3:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \beta_3 X_i^3 + U_i.$$

- Kết quả hồi qui:

$$Y_i = 141,7667 + 63,47766X_i - 2,96154X_i^2 + 0,6393X_i^3 + U_i$$

$$R^2 = 0,9983$$



**Bài tập**: Một mẫu gồm 12 quan sát:

$Y_i$  – Doanh số bán hàng (tr đ);

$X_{2i}$  (ngàn đ/SP) – Giá bán sản phẩm;  $X_{3i}$  (tr đ) – Thu nhập

$Y_i$	$X_{2i}$	$X_{3i}$
1270	108	8,5
1490	106	8,0
1060	130	7,3
1626	115	9,6
1020	140	8,2
1800	130	9,4

$Y_i$	$X_{2i}$	$X_{3i}$
1610	140	10,5
1280	128	6,7
1390	116	6,2
1440	120	8,7
1590	140	9,1
1380	150	8,6

**Hãy Ước lượng hàm HQ  $Y_i/X_{2i}; X_{3i}$   
Nêu ý nghĩa kinh tế các HSHQ**

## Bài tập1

$Y_i$	138	143	158	137	160	127	105	162	101	175	126	148
$X_{2i}$	16	21	22	13	23	15	18	22	14	24	17	23
$X_{3i}$	12	14	15	13	15	11	9	16	9	17	11	14

Bảng số liệu trên cho thấy doanh thu ( $Y_i$ ), chi phí quảng cáo ( $X_{2i}$ ) và tiền lương bộ phận bán hàng ( $X_{3i}$ ) của 12 công ty, đơn vị đều là tr đ.

1. Xác định các hàm hồi qui tuyến tính và tính hệ số xác định điều chỉnh: \*  $Y/X_{2i}$ , \*  $Y/X_{3i}$
2. Xác định hàm hồi qui  $Y/X_{2i}, X_{3i}$  và tính hệ số xác định điều chỉnh. Ý nghĩa kinh tế của các HSHQ
3. Kiểm định các giả thiết và cho biết kết quả kiểm định: \*  $H_0: \beta_2 = 0; H_1: \beta_2 \neq 0$   
\*  $H_0: \beta_3 = 0; H_1: \beta_3 \neq 0$ . Suy ra, để dự báo doanh thu, nên chọn hàm nào?
3. Dự báo với  $X_3 = 15$  tr đ/tháng, hệ số tin cậy 95%.

$$2 / R_{3 \text{ bien}}^2 = \frac{\beta_2 \sum y_i x_{2i} + \beta_3 \sum y_i x_{3i}}{\sum y_i^2}$$

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k}$$

*Với : k là số tham số của mô hình*

*n là số quan sát (cỡ mẫu)*





(1). a.  $Y_i = 56,512 + 4,394X_{2i}$

$R^2 = 0,583$     $R^2_{\text{Adjusted}} = 0,5413$

b.  $Y_i = 29,671 + 8,4868 X_{3i}$     $R^2 = 0,9723$

$R^2_{\text{Adjusted}} = 0,9695$

(2).  $Y_i = 29,6614 + 0,002318 X_{2i} + 8,4842 X_{3i}$

$R^2 = 0,9723$     $R^2_{\text{Adjusted}} = 0,9661$

## Ý nghĩa kinh tế:

**$\beta_2 = 0,002318$**   $> 0$ :  $X_2$  &  $Y$  đồng biến, nếu tiền lương bộ phận bán hàng không đổi, khi tăng (giảm) chi phí quảng cáo lên 1 triệu đ tháng thì doanh số bán hàng bình quân tăng (giảm) 0,002318 triệu đồng tháng

- **$\beta_3 = 8,4842$**   $> 0$ :  $X_3$  &  $Y$  đồng biến, nếu chi phí quảng cáo không đổi, khi tăng (giảm) tiền lương bộ phận bán hàng lên 1 triệu đồng tháng, thì doanh số bán hàng bình quân sẽ tăng (giảm) 8,4842 triệu đồng/tháng

(3). **Kiểm định  $\beta_2$**  :  $H_0 : \beta_2 = 0$ ;  $H_1 : \beta_2 \neq 0$ ;  $\text{Var}(\beta_2) = 0,02545$   
→  $\text{se}(\beta_2) = 0,5045$ ;  $t_0 = 0,00459 < t_{0,025;9} = 2,262$   
→ Chấp nhận  $H_0$  → **Biến  $X_2$  không ảnh hưởng lên  $Y$**

**b/ Kiểm định  $\beta_3$**  :  $H_0 : \beta_3 = 0$ ;  $H_1 : \beta_3 \neq 0$ ;  
 $\text{Var}(\beta_3) = 0,5693$  →  $\text{se}(\beta_3) = 0,7545$   
 $t_0 = 11,2448 > t_{0,025;9} = 2,262$  → Bác bỏ  $H_0$   
→ **Biến  $X_3$  thực sự có ảnh hưởng lên biến  $Y$ .**  
**Ngoài ra, dựa trên  $R^2$  Adjusted:**

$$\begin{cases} \bar{R}_{X_2}^2 < \bar{R}_{X_2, X_3}^2 \Rightarrow X_3 \text{ cần thiết đưa vào mô hình} \\ \bar{R}_{X_3}^2 > \bar{R}_{X_2, X_3}^2 \Rightarrow X_2 \text{ không cần thiết cho mô hình} \end{cases}$$

(4). **Chọn hàm (2) để dự báo: Hàm 2 biến Y theo  $X_3$**   $\rightarrow$  giá trị trung bình của doanh số bán hàng

$$Y_i = 29,671 + 8,4868 X_{3i}$$

Với  $X_{3-0} = 15$  tr \$ tháng, độ tin cậy 95%

$$Y_0 = 156,973 \quad \text{Var}(Y_0) = 2,1216$$

$$\rightarrow \text{se}(Y_0) = 1,4566$$

$$t_{0,025; 10} = 2,228$$

$$\text{KTC} : 153,7279 < Y_0 < 160,2185$$

**Kết luận: -----**

## Bài tập 2

Y	11	10	9	11	10	10	9	7	8	8	6	8	9	12	7
X <sub>2i</sub>	8	5	9	4	7	8	6	7	8	10	9	5	5	4	10
X <sub>3i</sub>	12	10	14	16	12	14	12	10	11	13	8	10	10	16	12

Số liệu trên cho thấy thu nhập ( $Y_i$  – nghìn USD/người/năm), tỷ lệ lao động thủ công ( $X_{2i}$  – %) và số năm trung bình kinh nghiệm ( $X_{3i}$  – năm).

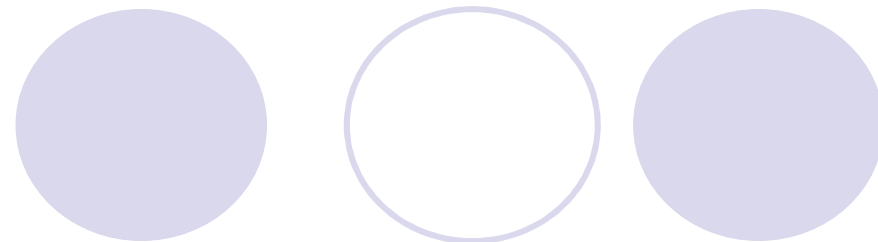
1. Tìm hàm HQ:  $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i}$ . Ý nghĩa kinh tế  $\beta_{2i}$  và  $\beta_3$ .
2. Kiểm định các giả thiết:  $H_0: \beta_2 = 0$  và  $H_0: \beta_3 = 0$  với mức ý nghĩa 5%.
3. Phải chăng cả hai yếu tố *Tỷ lệ lao động thủ công* và *Số năm kinh nghiệm* đều không ảnh hưởng đến thu nhập? Cho biết độ tin cậy 95%.


$$1/ Y = 6,202 - 0,376 X_2 + 0,4525 X_3$$

## 2/ Ý nghĩa kinh tế

- $\beta_2 = -0,376 < 0 \rightarrow$  **Biến  $X_2$  và  $Y$  nghịch biến:** Khi số năm kinh nghiệm không đổi, tỷ lệ lao động phổ thông tăng lên 1%  $\rightarrow$  thu nhập bình quân giảm xuống 0,376 nghìn USD / người / năm
- $\beta_3 = 0,4525 > 0 \rightarrow$  **biến  $X_3$  và  $Y$  đồng biến:** Khi tỷ lệ lao động phổ thông không đổi, số năm kinh nghiệm tăng (giảm) 1 năm  $\rightarrow$  thu nhập bình quân tăng (giảm) 0,4525 nghìn USD / người / năm

## (2) a. Kiểm định $\beta_2$



\*  $H_0: \beta_2 = 0 ; H_1: \beta_2 \neq 0$

\*  $t_0 = -2,8343 ; t_{\alpha/2 ; (n-3)} = t_{0,025 ; 12} = 2,179$

\*  $|t_0| > t_\alpha \rightarrow$  Bác bỏ  $H_0 \rightarrow \beta_2$  có ý nghĩa thống kê, biến  $X_2$  có ảnh hưởng lên  $Y$  (% lao động thủ công có ảnh hưởng lên thu nhập)

## (2) b. Kiểm định $\beta_3$

\*  $H_0: \beta_3 = 0 ; H_1: \beta_3 \neq 0$

\*  $t_0 = 3,7864 > t_{\alpha/2} = 2,179 \rightarrow$  Bác bỏ  $H_0 \rightarrow \beta_3$  có ý nghĩa thống kê, biến  $X_3$  có ảnh hưởng lên  $Y$  (số năm kinh nghiệm có ảnh hưởng lên thu nhập)

### (3). Kiểm định đồng thời

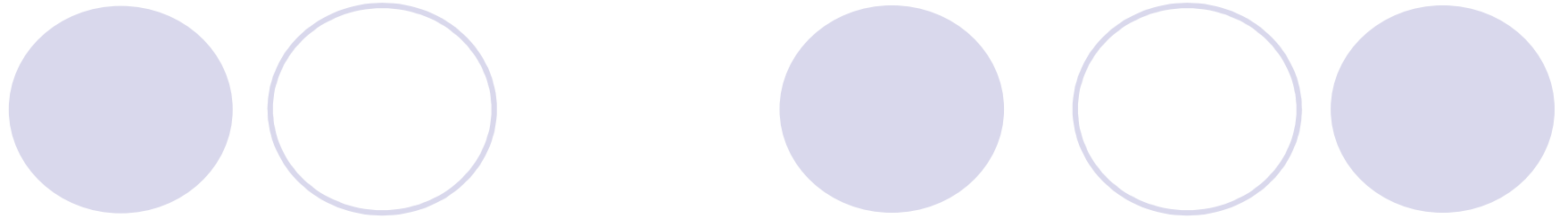
- $H_0: \beta_2 = \beta_3 = 0$  ;  $H_1: \beta_2 \neq 0$  hoặc  $\beta_3 \neq 0$

- $$R^2 = \frac{\hat{\beta}_2 \sum y_i x_{2i} + \hat{\beta}_3 \sum y_i x_{3i}}{\sum y_i^2} = 0,6932$$

$$F_0 = \frac{R^2 (n - k)}{(1 - R^2)(k - 1)} = \frac{0,6932 * 12}{(1 - 0,6932) * 2} = 13,5567$$

- $F_{\alpha; (k-1), (n-k)} = F_{0,05; (2;12)} = 3,89$





- $F_0 = 13,5567 > F_{\alpha} = 3,89 \rightarrow$  Bác bỏ  $H_0$
- **Kết luận**: ít nhất một trong hai yếu tố: % lao động thủ công hoặc số năm kinh nghiệm có ảnh hưởng lên thu nhập

### Bài tập 3

Q	65344	72399	78300	74594	66925	67594	73463	83034	93953
L	2033.4	2151.2	2092.4	2134.8	2250.3	2232.7	2273.2	2365.1	2460.2
K	23.88	25.79	28.32	31.31	33.74	35.99	38.14	40.67	43.23

Q	103258	109632	130551	137819	133311	139350	145621
L	2571.8	2587	2844.7	2945	2531.4	2251	2115
K	45.36	46.80	47.70	49.20	51.60	52.99	55.60

Trên đây là số liệu công nghiệp VN từ 1976 – 1991.

Q – sản lượng, L – chi phí lao động, K – Vốn.

1. Dùng hàm SX Cobb – Douglas:  $Q = \gamma L^{\alpha} K^{\beta}$

Hãy ước lượng và nêu ý nghĩa kinh tế các tham số  $\alpha$ ,  $\beta$ ?

2. Ước lượng hàm HQ:  $\ln(Q/L) = \beta_0 + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln(K/L) + U_i$

3. Kiểm định giả thiết  $H_0: \beta_0 = 0$  với mức ý nghĩa 2%

4. Tính  $R^2$ , phân tích kết quả?